CHAPITRE 1

Fonctions d'une variable réelle

1.1 Rappels d'analyse

1.1.1 Utilisation de la continuité

Théorème 1 — ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ avec $a < b$.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \textit{(ou } [f(b), f(a)]\textit{)}, \quad \exists x \in [a, b] \;/\; f(x) = y$$

Théorème 2 — ***Continuité sur un segment***

Si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Théorème 3 — ***Théorème de la bijection***

Soit f une fonction <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
En notant $J = f(I)$, la bijection réciproque associée $f^{-1} : J \to I$, est alors également continue sur J, strictement monotone sur J, de même monotonie que f.

Remarque :

> Graphiquement, les courbes représentatives de f sur I, et de f^{-1} sur J, sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$.

1.1.2 Utilisation de la dérivation

Théorème 4 ***Dérivabilité de la réciproque***

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et f^{-1} sa bijection réciproque définie sur $J = f(I)$.
Soit $a \in I$, et soit $b = f(a) \in J$.

$$f^{-1} \text{ dérivable en } b \iff \begin{cases} f \text{ dérivable en } a \text{ et } f'(a) \neq 0 \\ \quad \text{ou} \\ f \text{ non dérivable en } a \text{ et } \lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty \end{cases}$$

Lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, on a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Théorème 5 ***Théorème de Rolle***

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\text{il existe un réel } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

Théorème 6 ***Théorème des Accroissements Finis***

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors :

$$\text{il existe un réel } c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Théorème 7 ***Inégalité des Accroissements Finis V1***

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que :

$$\forall t \in]a, b[, \ m \leqslant f'(t) \leqslant M$$

Alors :

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$$

Théorème 8 ***Inégalité des Accroissements Finis V2***

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in]a, b[, \ |f'(t)| \leqslant K$$

Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K|b - a|$$

Théorème 9 ***Inégalites de convexité***

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x \geqslant x + 1} \qquad \boxed{\forall x > 0, \ \ln(x) \leqslant x - 1}$$

1.1.3 Intégration sur un segment

Définition 10

Lorsqu'une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$, on peut définir sans ambiguité l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide d'une primitive F de f : $\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$.

Proposition 11 ***Linéarité de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b f(t)dt}$$

Proposition 12 ***Relation de Chasles***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors pour tous $a, b, c \in I$, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt}$$

Théorème 13 ***Intégration par parties***

Si u et v sont deux fonctions $\underline{\underline{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur un segment } [a, b]}}$, alors :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$$

Théorème 14 ***Formule du changement de variable***

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans I. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du}$$

Remarques :

R 1 – Un changement de variable peut se faire "dans les deux sens".

R 2 – Si on part d'une intégrale $\int_a^b g(x)dx$ et qu'on demande un changement de variable $u = \varphi(x)$, on essaie d'écrire "$g(x)dx$" sous la forme "$f(\varphi(x))\, \varphi'(x)dx$" où $f(\varphi(x))$ est une expression où n'apparaissent que des $\varphi(x)$ (et non des "x" seuls).

R 3 – Si on part d'une intégrale $\int_a^b g(x)dx$ et qu'on nous demande un changement de variable $x = \varphi(t)$, il s'agit d'abord de remplacer les bornes de l'intégrale par des "$\varphi(a)$" et des "$\varphi(b)$", puis on remplace les x par $\varphi(t)$ et le "dx" par "$\varphi'(t)dt$".

R 4 – Les changements de variables "affines" $t = au + b$ $(a \neq 0)$ sont toujours valides et n'ont pas besoin d'être justifiés.

Un cas particulier est le changement $u = -t$. Il suffit pour cela de changer le signe des bornes, de remplacer les t par $-u$ (ou les $-t$ par u) et de changer également le du en $-dt$:

Proposition 15 ***Propriétés de symétrie***

Soit $a \geqslant 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

- *Si f est une fonction paire, alors :* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt.$
- *Si f est une fonction impaire, alors :* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$

Proposition 16 ***Positivité de l'intégrale***

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

$$\Big(\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

Remarques :

R 1 – L'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif si les bornes sont bien dans le bon sens.

R 2 – De même, si les bornes sont dans le bons sens, l'intégrale d'une fonction négative est un nombre négatif. La propriété s'appelle quand même la "positivité" de l'intégrale.

Proposition 17 ***Fonction continue positive d'intégrale nulle***

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$$

Proposition 18 ***Positivité/Croissance de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

Proposition 19 ***Inégalité de la moyenne***

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose qu'il existe deux réels m et M vérifiant : $\forall x \in [a, b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Proposition 20 ***Inégalité triangulaire***

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Alors :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt \leqslant (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|}$$

Remarque :

La seule méthode qu'on connaît pour déterminer la limite d'une fonction (ou d'une suite) définie par une intégrale est par encadrement ou par comparaison.

1.1.4 Intégrales impropres

- **Intégrales de Riemann sur $[1,+\infty[$:**

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ CV } \iff \alpha > 1}$$

Par exemple : $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ DV}}$, $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ CV}}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ CV, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ DV, ….

- **Intégrales de Riemann sur $]0,1]$:**

$$\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ CV } \iff \alpha < 1}$$

Par exemple : $\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{t} dt \text{ DV}}$, , $\boxed{\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \text{ CV}}$, $\int_0^{1} \frac{1}{t^2} dt$ DV, $\int_0^{1} \frac{1}{t^3} dt$ DV, ….

- **Densités de lois exponentielles :**

$$\forall a > 0, \quad \int_0^{+\infty} a e^{-at} dt \ \text{ CV} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} a e^{-at} dt = 1$$

- **Densités de lois normales :**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}}$$

Théorème 21 ***Critères de convergence pour les fonctions positives***

- ***Théorème d'équivalence des fonctions positives :***

$$\boxed{Si \begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \\ \forall x \in [a,b[, \ g(x) \geqslant 0 \end{cases}, \ Alors \int_a^b f(x)dx \ et \int_a^b g(x)dx \ sont\ de\ même\ nature}$$

- ***Théorème de comparaison des fonctions positives :***

$$\boxed{Si \begin{cases} \forall x \in [a,b[, \ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \\ \displaystyle\int_a^b g(x)dx \ converge \end{cases}, \ Alors \int_a^b f(x)dx \ converge}$$

- ***Théorème de négligeabilité des fonctions positives :***

$$\boxed{Si \begin{cases} f(x) = \underset{x\to b}{o}\big(g(x)\big) \\ \displaystyle\int_a^b g(x)dx \ converge \\ \forall x \in [a,b[, \ g(x) \geqslant 0, \end{cases}, \ Alors \int_a^b f(x)dx \ converge}$$

Théorème 22 ***ACV $\Rightarrow$ CV***

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente (i.e. si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge), alors l'intégrale est convergente.
En cas de convergence absolue et si $a < b$, on a alors ***l'inégalité triangulaire*** *:*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt}$$

1.2 Fonctions circulaires

1.2.1 Définitions

Définition 23

Pour tout réel x, on définit $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les nombres définis par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \mathrm{Re}\big(e^{ix}\big) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \mathrm{Im}\big(e^{ix}\big) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

Proposition 24

Les fonctions cos *et* sin *sont donc définies sur* $\mathbb{R}$*, et vérifient :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1} \ \textit{et} \ \boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1} \ \textit{et} \ \boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1}$$

Démonstration :

Cela vient de la définition : ce sont les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique. Les abscisses et ordonnées sont donc toujours dans $[-1,1]$ et le théorème de Pythagore nous donne la deuxième relation.

Proposition 25

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x)=\cos(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y+2k\pi \\ \textit{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -y+2k\pi \end{cases} \quad \textit{et} \quad \sin(x)=\sin(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y+2k\pi \\ \textit{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = (\pi-y)+2k\pi \end{cases}$$

Remarque :

$\boxed{\cos(x)=0} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ $\qquad$ $\boxed{\sin(x)=0} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = k\pi$

$\boxed{\cos(x)=1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2k\pi$ $\qquad$ $\boxed{\sin(x)=1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\boxed{\cos(x)=-1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \pi+2k\pi$ $\qquad$ $\boxed{\sin(x)=-1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Définition 26

On appelle **fonction tangente**, la fonction tan définie par l'expression : $\boxed{\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$.

Elle est définie partout où $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Valeurs remarquables des cos,sin,tan :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\star\star$

1.2.2 Propriétés trigonométriques

Proposition 27 ***Parité, périodicité***

La fonction cosinus est <u>*2π-périodique*</u> *et* <u>*paire*</u> *sur $\mathbb{R}$.*
La fonction sinus est <u>*2π-périodique*</u> *et* <u>*impaire*</u> *sur $\mathbb{R}$.*
La fonction tangente est <u>*π-périodique*</u> *et* <u>*impaire*</u> *sur son domaine de définition.*
On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad & \boxed{\cos(-x) = \cos(x)} \quad \boxed{\cos(x+2\pi) = \cos(x)} \\
\forall x \in \mathbb{R},\quad & \boxed{\sin(-x) = -\sin(x)} \quad \boxed{\sin(x+2\pi) = \sin(x)} \\
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},\quad & \boxed{\tan(-x) = -\tan(x)} \quad \boxed{\tan(x+\pi) = \tan(x)}
\end{aligned}$$

Proposition 28 ***Formules de symétries***

Pour tout réel x tel que les expressions aient un sens, on a par lecture du cercle trigonométrique :

$$\begin{array}{lll}
\boxed{\cos(x+\pi) = -\cos(x)} & \boxed{\sin(x+\pi) = -\sin(x)} & \boxed{\tan(x+\pi) = \tan(x)} \\
\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x)} & \boxed{\sin(\pi - x) = \sin(x)} & \boxed{\tan(\pi - x) = -\tan(x)} \\
\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)} & \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)} & \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}} \\
\boxed{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)} & \boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)} & \boxed{\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}}
\end{array}$$

Remarque :

Il existe aussi de nombreuses autres formules trigonométriques liant les fonctions cosinus et sinus, mais seules les précédentes sont à connaître par coeur. Toutes les autres sont à re-démontrer, et le résultat sera toujours donné par l'énoncé.

Exemples :

E 1 – Montrer que pour tous réels a et b, on a les **formules d'addition suivantes** :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$$

On a $\cos(a+b) = \mathrm{Re}(e^{i(a+b)})$ et $\sin(a+b) = \mathrm{Im}(e^{i(a+b)})$.
Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))
\end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{i(a+b)}$, on en déduit donc bien que d'une part : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et que d'autre part : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

E 2 – Montrer que pour tous réels a et b, on a les **formules de l'angle moitié** :

$$\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

On a $\cos(a) + \cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}(e^{ia} + e^{ib})$. De même $\sin(a) + \sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia} + e^{ib})$.

Or, on a :

$$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\;2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{ia}+e^{ib}$, on en déduit bien les formules proposées.

E 3 – Il existe également des **techniques de linéarisation** des puissances de cosinus ou sinus.
Par exemple : peut-on linéariser $\cos^4(x)$, i.e. écrire $\cos^4(x)$ comme une somme de termes de la forme $\lambda\cos(\beta x)$ ou $\mu\sin(\gamma x)$.
On utilise alors les formules d'Euler, puis la formule du Binôme de Newton :

$$\cos^4(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+\binom{4}{1}e^{3ix}e^{-ix}+\binom{4}{2}e^{2ix}e^{-2ix}+\binom{4}{3}e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)=\frac{1}{16}\left((e^{4ix}+e^{-4ix})+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right)=\boxed{\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}}$$

De même, peut-on linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$?

$$\cos^3(x)\sin(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)=\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{16i}\left((e^{4ix}-e^{-4ix})+2(e^{2ix}-e^{-2ix})\right)=\frac{1}{16i}\left(2i\sin(4x)+4i\sin(2x)\right)=\boxed{\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)}$$

1.2.3 Etude de la fonction cosinus

Théorème 29 ***Dérivation de l'exponentielle complexe, admis***

La fonction $x\mapsto e^{ix}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et elle se dérive comme toute fonction du type $x\mapsto e^{u(x)}$ avec $u(x)=ix$ et $u'(x)=i$. On a donc :

$$\text{si}\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=e^{ix},\qquad \text{alors}\ \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=ie^{ix}$$

Proposition 30

La fonction cos*, donnée par $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos'(x)=-\sin(x)}$$

Démonstration :

La fonction cos est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos'(x)=\dfrac{ie^{ix}+(-i)e^{-ix}}{2}=\dfrac{i}{2}(e^{ix}-e^{-ix})=\dfrac{i}{2}(2i\sin(x))=i^2\sin(x)=-\sin(x)$.

Proposition 31

La fonction cos *admet un DL de tout ordre en* 0 *qui est :*

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)}$$

Démonstration :

La fonction cos étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur au moins $]-1,1[$, le théorème de Taylor-Young assure qu'elle admet bien un DL de tout ordre en 0.

On sait que pour tout entier $n \geqslant 0$, $e^{ix} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(ix)^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$ et $e^{-ix} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(ix)^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right))$, donc par somme des DL, on obtient :

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{k=0}^{2n} (i^k + (-i)^k) \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$$

Or, dès que k est impair, on a $(-i)^k = -i^k$, donc dans la somme précédente, il ne reste que les k pairs, et lorsque k pair, en écrivant $k = 2j$, on a : $i^k + (-i)^k = i^{2j} + (-i)^{2j} = (i^2)^j + ((-i)^2)^j = (-1)^j + (-1)^j = 2(-1)^j$. On a donc :

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{j=0}^{n} 2(-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$$

et on obtient alors le DL de $\cos(x)$ au voisinage de 0.

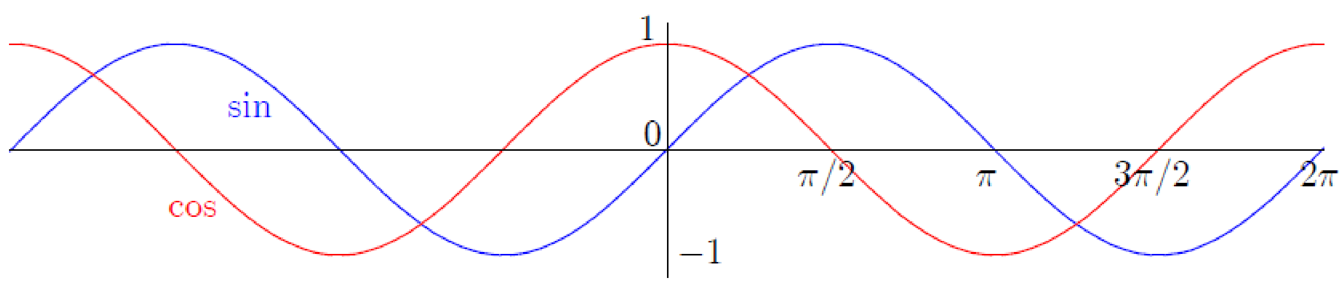
Remarque :

En pratique pour obtenir le DL de cos en 0 :

- On écrit le DL de e^x : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- On ne garde que les termes dont la puissance est paire : $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- On rajoute une alternance de signes : $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

Proposition 32

On a donc : $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$ *et en particulier :* $\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}}$.



1.2.4 Etude de la fonction sinus

Proposition 33

La fonction sin*, donnée par* $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)}$$

Démonstration :

sin est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que somme de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Dee plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \dfrac{ie^{ix}-(-i)e^{-ix}}{2i} = \dfrac{i}{2i}(e^{ix}+e^{-ix}) = \dfrac{1}{2}(2\cos(x)) = \cos(x)$.

Proposition 34

La fonction sin *admet un Développement Limité de tout ordre en* 0 *qui est :*

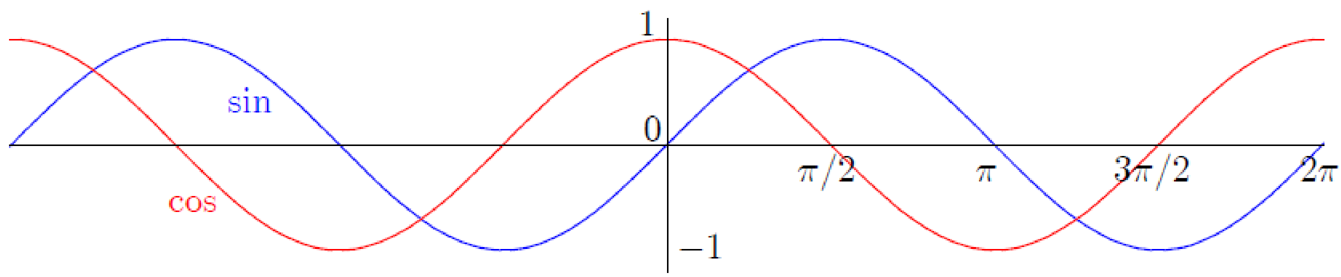
$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)}$$

Remarque :

En pratique pour obtenir le DL de sin en 0 :
- On écrit le DL de e^x : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- On ne garde que les termes dont la puissance est impaire : $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- On rajoute une alternance de signes : $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Proposition 35

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x} \qquad \textit{et} \qquad \sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3}{6}$$



1.2.5 Etude de la fonction tangente

Proposition 36

La fonction tan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur son ensemble de définition et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \boxed{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$$

Démonstration :

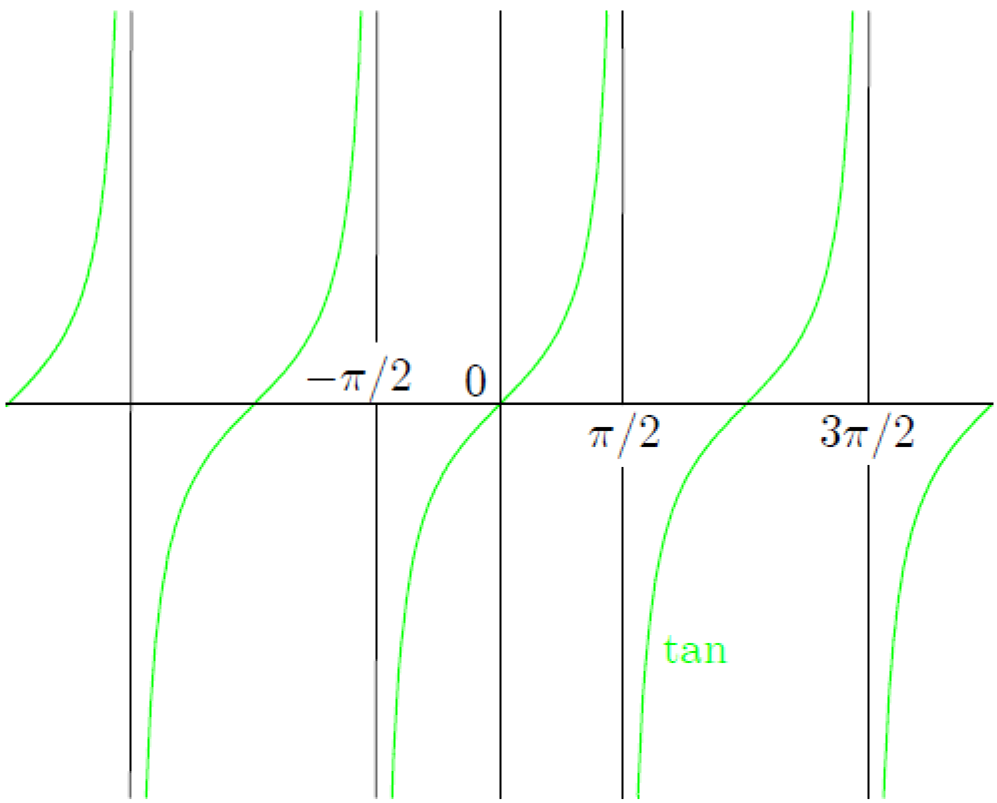
Puisque sin et cos sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ le dénominateur ne s'annulant jamais. De plus, en notant $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

$$\forall x \in D, \; \tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{cases}$$

Remarques :

R 1 – Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, on a donc $\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$

R 2 – La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, donc elle admet un DL de tout ordre en 0, mais ce DL est compliqué, il n'y a pas de formule explicite pour le coefficient devant x^n. Il faut le faire à la main en faisant le quotient des DL de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.



1.3 Fonctions circulaires réciproques

1.3.1 Fonction Arcsin

Définition 37

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est donc bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2) = [-1, 1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arcsinus**, notée Arcsin.

$$\boxed{\text{Arcsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

Remarques :

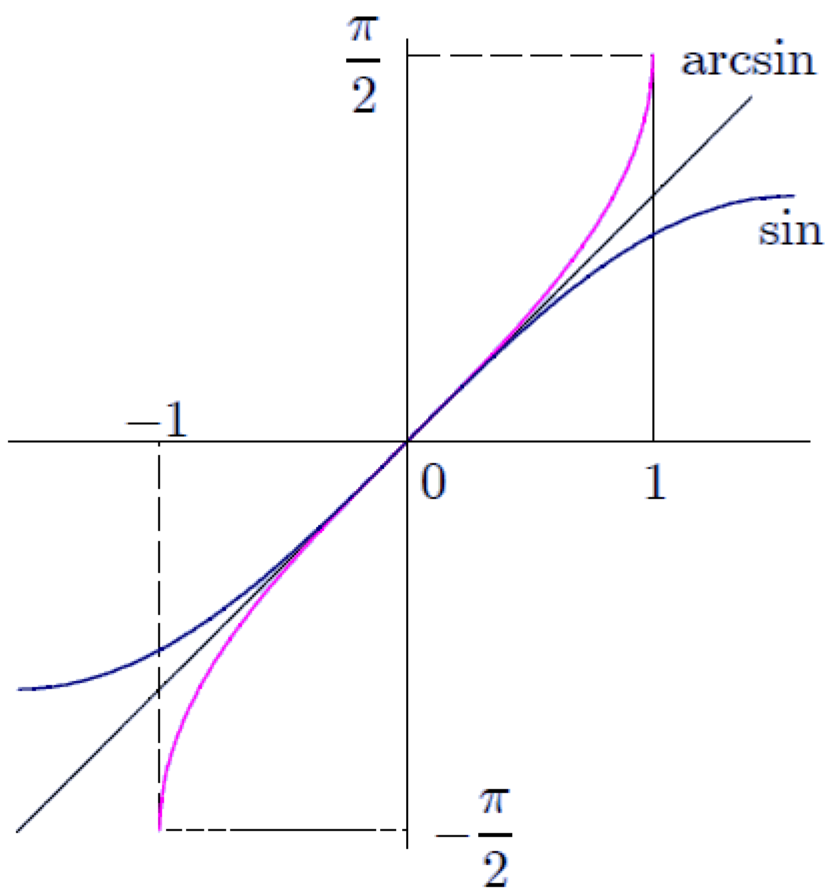
R 1 – Puisque sin et Arcsin sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x, \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

R 2 – Puisque sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction Arcsin est également strictement croissante sur $[-1, 1]$

R 3 – On a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}}$$



Proposition 38

La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ uniquement sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction sin est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et que $\sin' = \cos$, on sait que :

$$\text{Arcsin dérivable en } \sin(a) \iff \sin'(a) \neq 0 \iff \cos(a) \neq 0 \iff a \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ainsi Arcsin est dérivable sur tout $[-1,1]$ sauf en $\sin(-\pi/2) = -1$ et en $\sin(\pi/2) = 1$, autrement dit, Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 39

Puisque la fonction Arcsin est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut $\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{Arcsin(x)}{x} = 1} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{Arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

Remarque :

Puisqu'on connait bien la dérivée de Arcsin et que c'est une forme dont on connaît un DL, on peut en déduire un DL de Arcsin en primitivant ce DL.

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

or, on sait que :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}u^4 + o(u^4)$$

on a donc :

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6)$$

d'où en primitivant :

$$\text{Arcsin}(x) = \underbrace{\text{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$

1.3.2 Fonction Arccos

Définition 40

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ vers $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arccosinus**, notée Arccos.

$$\boxed{\text{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]}$$

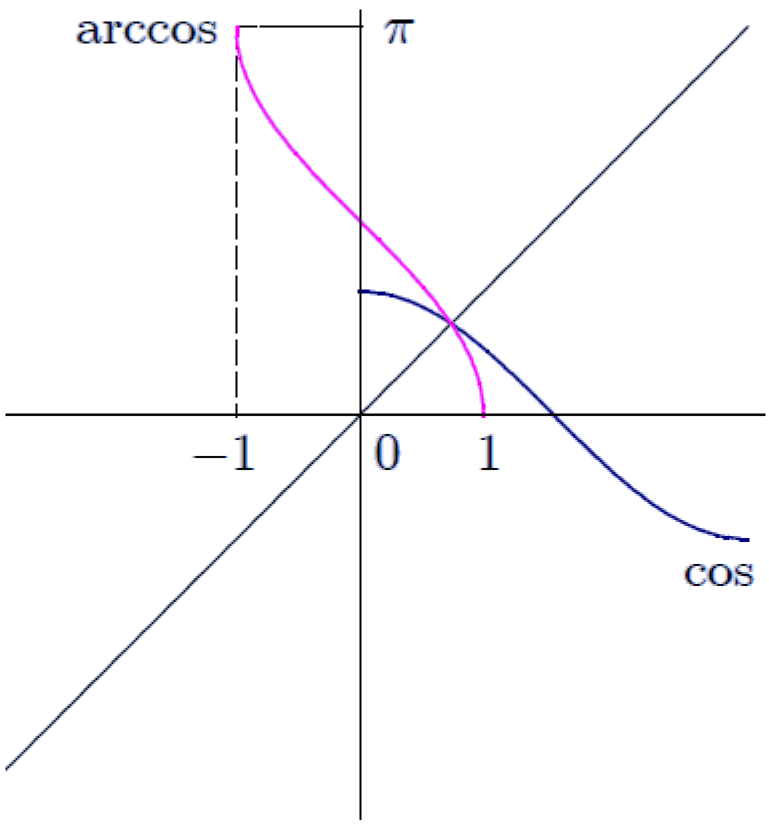
Remarques :

R 1 – Puisque cos et Arccos sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x, \qquad \forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

R 2 – Puisque cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, la fonction Arccos est également strictement décroissante sur $[-1, 1]$

R 3 – Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}(x))} = \boxed{\sqrt{1 - x^2}}$.



Proposition 41

La fonction Arccos est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ uniquement sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \mathit{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $\cos' = -\sin$, on sait que :

$$\text{Arccos dérivable en} \quad \cos(a) \iff \cos'(a) \neq 0 \iff -\sin(a) \neq 0 \iff a \notin \{0,\pi\}$$

Ainsi Arccos est dérivable sur tout $[-1,1]$ sauf en $\cos(0)=1$ et en $\cos(\pi)=1$, autrement dit, Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \text{Arccos}'(x) = (\cos^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos'(\cos^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque :

On peut également obtenir un DL de $\text{Arccos}(x)$ (ou de $\text{Arcin}(x)$) en 0 en remarquant que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}(-x^2)^2 + \cdots$$

et en prenant la primitive, avec la bonne constante, on obtient un DL de $\text{Arcsin}(x)$ ou de $\text{Arccos}(x)$. Puisque $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient par exemple que :

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

1.3.3 Fonction Arctan

Définition 42

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\left]\lim\limits_{x\to-\pi/2}\tan(x), \lim\limits_{x\to\pi/2}\tan(x)\right[=]-\infty,+\infty[$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arctangente**, notée Arctan.

$$\boxed{\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

Remarques :

R 1 – Puisque tan et Arctan sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x, \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

R 2 – Puisque tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction Arctan est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Proposition 43

La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ e sur $\mathbb{R}$. De plus $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

Démonstration :

Puisque la fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$, on est certain que Arctan est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 44

La fonction Arctan admet pour limites : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} Arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}}$ *et* $\boxed{\lim_{x \to +\infty} Arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

Sa courbe représentative admet donc deux asymptotes horizontales d'équations $y = -\dfrac{\pi}{2}$ *et* $y = \dfrac{\pi}{2}$.