CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION LETTRES & SCIENCES-HUMAINES

MATHEMATIQUES

PROGRAMME ENS (B/L)

Samedi 15 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On désire tester si la répartition des voyelles dans un texte ancien correspond à celle de la langue française actuelle.
On étudie quelques aspects probabilistes permettant de répondre à cette question.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les notations et les résultats des parties précédentes.

Notation
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, on note $cov(X,Y)$ leur covariance, si celle-ci existe.

Partie 1

Soit n et s des entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs $C_1, .., C_s$. Les boules de couleur C_i sont en proportion p_i. On a donc $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$ et on suppose que, pour tout i, $p_i > 0$.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
Pour tout i de $\{1,..,s\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur C_i obtenues à l'issue des n tirages (on remarque que la variable X_i dépend de n). On définit la variable aléatoire U_n par : $U_n = \sum_{i=1}^{s} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$.

A. Etude des variables X_i.

1) Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.

2) Soit $(i,j) \in \{1,..,s\}^2$ tel que $i \neq j$. Déterminer la loi de $X_i + X_j$ et sa variance.
En déduire que $cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$.

B. On suppose dans cette partie que $s = 2$.

1) Montrer que $U_n = Z_1^2$ où $Z_1 = \dfrac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1p_2}}$. (On utilisera la relation : $X_1 + X_2 = n$).

2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de Z_1 lorsque n est grand ?

C. On suppose dans cette partie que $s = 3$ et que $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{4}$ et $p_3 = \dfrac{1}{2}$.

On pose $Z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3 - \dfrac{n}{2}\right)$ et $Z_2 = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\left(X_1 - X_2\right)$.

1) Montrer que $U_n = Z_1^2 + Z_2^2$. (On utilisera la relation : $X_1 + X_2 + X_3 = n$).

2) Déterminer les espérances et variances de Z_1 et Z_2 et $cov(Z_1, Z_2)$.

3) Par quelle loi peut-on approcher celle de Z_1 lorsque n est grand?

4) Pour i élément de $\{1,..,n\}$, on définit la variable T_i par : $T_i = 1$ si au $i$ème tirage on a obtenu une boule de couleur C_1, $T_i = -1$ si au $i$ème tirage on a obtenu une boule de couleur C_2 , $T_i = 0$ si au $i$ème tirage on a obtenu une boule de couleur C_3 .

a) Exprimer $X_1 - X_2$ à l'aide des variables T_i .

b) En déduire que l'on peut approcher la loi de Z_2 , quand n est grand, par la loi normale centrée réduite.

D. On suppose $s = 4$ et $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{4}$.

1) Pour i élément de $\{1,2,3,4\}$, on pose $Y_i = \dfrac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$.

On note M la matrice carrée d'ordre 4 dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut $cov(Y_i , Y_j)$. On définit N la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{4}$.

Exprimer M en fonction de N et I, où I désigne la matrice unité.

2) a) On définit 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)$, $e_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)$, $e_4 = \dfrac{1}{2}(1,1,1,1)$.

Montrer que ces 4 vecteurs sont des vecteurs propres de N et qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

Montrer que ${}^tQ\,Q = I$. (${}^tQ$ désigne la transposée de Q).

Expliciter la matrice ${}^tQ\,M\,Q$.

3) On définit les variables Z_1, Z_2 , Z_3 et Z_4 par : $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = {}^tQ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer chaque Z_i en fonction de Y_1, Y_2 , Y_3 et Y_4 et montrer que $Z_4 = 0$.

b) Montrer que, pour $i = 1, 2, 3$, les variables Z_i sont centrées.

c) Montrer que $U_n = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$. (On pourra calculer $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$).

Partie 2

1) Soit r un entier naturel non nul.

a) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$. On note J_r sa valeur.

b) Montrer que pour tout entier r non nul, $J_{r+2} = r\, J_r$.

2) a) Soit Y une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.
Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y^2 et montrer que Y^2 admet une densité que l'on déterminera.

b) En déduire la valeur de J_1.

3) Soit r un entier naturel non nul. On définit la fonction f_r par :

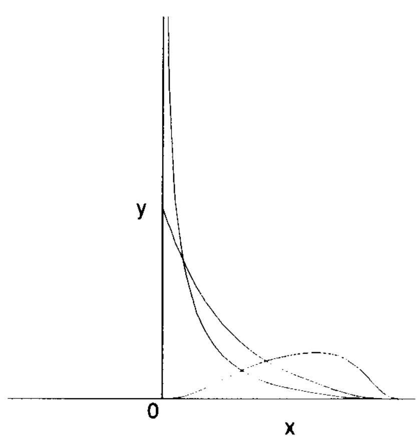
$$\forall x > 0,\quad f_r(x) = \frac{1}{J_r} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad\qquad \forall x \leq 0,\quad f_r(x) = 0.$$

a) Montrer que f_r est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 (lire khi-deux) à r degrés de liberté si et seulement si X admet f_r pour densité.

b) Quelle loi reconnaît-on pour $r = 2$?

c) Recopier le graphique ci-dessous en identifiant les courbes représentatives des trois fonctions f_1, f_2, f_7, en justifiant avec précision la réponse.



d) Soit X une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté. Montrer que X admet une espérance et une variance et donner leur valeur.

Partie 3

On reprend les notations de la partie 1, s étant un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

On admet que, n étant grand, la variable aléatoire U_n suit la loi du χ^2 à s-1 degrés de liberté.

Les linguistes ont déterminé la répartition, dans la langue française actuelle, des voyelles a, e, i ,o, u , parmi l'ensemble de ces voyelles :
$p_1 = 0{,}1743$ de a
$p_2 = 0{,}4031$ de e
$p_3 = 0{,}1641$ de i
$p_4 = 0{,}1212$ de o
$p_5 = 0{,}1373$ de u.

Dans un extrait (comportant 1145 voyelles a, e, i o, u) d'un texte de Pascal, « Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons » (confer « Traité du triangle arithmétique » 1654), on observe les fréquences :
$q_1 = 0{,}1476$ de a
$q_2 = 0{,}4105$ de e
$q_3 = 0{,}1607$ de i
$q_4 = 0{,}1476$ de o
$q_5 = 0{,}1336$ de u.

On cherche, à l'aide de cet extrait, à mettre en évidence l'évolution des fréquences lexicales de la langue française. Pour cela on fait l'hypothèse, a contrario, que les fréquences des voyelles dans un texte, parmi l'ensemble des voyelles, sont les mêmes au 17$^{\text{ième}}$ siècle et au 20$^{\text{ième}}$ siècle.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $0{,}975 = F_4(11{,}14)$, où F_4 désigne la fonction de répartition de la loi du χ^2 à 4 degrés de liberté,
- $1145\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\frac{(q_i - p_i)^2}{p_i} = 11{,}62$.

En introduisant des variables aléatoires convenables X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 et la variable U_n associée, justifier le rejet de l'hypothèse de la stabilité de la fréquence des voyelles.