MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Pascal Massart, Gilles Stoltz

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (le candidat n'a pas le choix de la planche mais peut traiter les exercices et les exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

Commentaires généraux

Cette année, comme les précédentes, a vu se succéder à l'oral trois catégories de candidats ; la première, dont les notes sont supérieures ou égales à 9, dispose d'une habileté mathématique certaine et d'une bonne connaissance du cours. La deuxième, qui recueille les notes entre 6 et 8, regroupe ceux qui sont habiles mais ne connaissent pas leur cours, ou l'inverse. Enfin, le troisième groupe rassemble tous ceux qui ont décidé un jour que les mathématiques n'étaient pas leur fort et qui ne connaissent même pas les résultats les plus fondamentaux du cours de classes préparatoires, voire (en ce qui concerne la manipulation des nombres complexes ou la composition des dérivées) du programme des classes de lycée. Nous félicitons les candidats de la première catégorie et pointons dans la suite du rapport, comme c'est l'usage, les erreurs commises ou les manquements patents des candidats.

L'épreuve orale n'étant pas un écrit *bis*, il est tenu grand compte de la réactivité des candidats aux indications du jury. S'enferrer dans une erreur malgré ses mises en garde est un mauvais point ; se sortir habilement lors du passage à l'oral d'un chausse-trappe dans lequel on était tombé pendant l'heure de préparation ou d'un calcul difficile que l'on n'avait pas su mener seul rapporte autant de points ou presque qu'une solution préparée seul. Les candidats veilleront donc à être attentifs et réceptifs à nos commentaires, et nous ne pouvons que les encourager à se présenter à l'oral dans un état d'esprit ouvert et combatif, quelle que soit la quantité de questions abordées. En revanche, nous déconseillons vivement les tentatives de bluff ou d'escroquerie ; le jury s'en rend compte presque à coup sûr et n'hésite pas un seul instant à obtenir des précisions et à demander la mise en œuvre précise du raisonnement utilisé.

Nous avons essayé de balayer pendant cette session d'oral tous les éléments du programme qui n'avaient pas été abordés à l'écrit (on n'y a donc pas retrouvé d'exercice sur la convergence en probabilité, par exemple) ; près d'une dizaine de candidats se sont ainsi vus interroger sur les fonctions de plusieurs variables (y compris les *extrema* liés), un sujet dont c'est peu dire qu'il est mal maîtrisé : la plupart des candidats connaissent tellement mal le théorème de Schwarz qu'ils ne se souviennent même plus de l'avoir jamais vu en cours ! Que les candidats se le tiennent pour dit : nous comptons bien interroger sur le programme, mais tout le programme, l'an prochain encore.

Enfin, du côté matériel, nous nous félicitions de la limitation du nombre d'auditeurs à six personnes par oral, qui a permis un étalement du public sur l'ensemble de la session ; il n'y a presque pas eu d'oral sans spectateurs. Les auditeurs ont pu être surpris par la disposition des chaises sur le côté de la salle ; cela permet au candidat de fixer le jury et de ne pas être déstabilisé par le public (et ses mimiques).

Puisque nous reproduisons les planches données ci-après, nous formulons maintenant nos commentaires planche par planche.

Commentaires plus spécifiques

Planche 1. Aucun candidat ne savait que $\ln 2 < 1$, ni bien sûr, combien valait approximativement la constante e. Nous avons essayé de leur faire prouver cette inégalité en les incitant à revenir à la définition de la fonction ln comme primitive de l'inverse. La question (2) de l'exercice 1 a vu des échanges entre limite et intégrale non justifiés, alors qu'une majoration directe de l'intégrande était de mise une fois établi que $\ln 2 < 1$.

Planche 2. Cette planche a fait ressortir l'étendue du manque d'aisance des candidats face aux nombres complexes, dont la manipulation est pourtant vue dès la classe de terminale. L'un d'entre eux a par exemple mis cinq bonnes minutes à retrouver par un calcul fastidieux que $e^{i\theta}$ a pour module 1. Le calcul des parties réelle et imaginaire de $1 + e^{i\theta}$ via l'égalité d'Euler n'est toujours pas effectué spontanément. Enfin, on ne peut que conseiller aux candidats de s'aider d'un dessin ; après tout, du point de vue de la représentation graphique, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ coïncident.

Planche 3. Les commentaires portent essentiellement sur la question (2) de l'exercice 1, où il s'agissait d'appliquer le théorème de la bijection strictement monotone et continue. Premièrement, il n'arrive que rarement que ce théorème soit bien énoncé ; ou il manque une hypothèse, ou des propriétés superflues au regard de la conclusion sont énoncées, ou l'on pense que le théorème entraîne immédiatement que la bijection est de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Malgré nos indications et commentaires, certains candidats ne comprenaient toujours pas qu'il fallait en outre étudier les variations de f aux infinis.

Planche 4. La question (1) de l'exercice 1 a souvent été mal ou trop approximativement traitée, les candidats omettant de remarquer la sous-matrice de rang $n - 1$. La question (2) se ramenait à la résolution d'un système de n équations à n inconnues : attention à soit bien procéder par équivalences, soit à raisonner par analyse et synthèse. Dans les deux cas, il faut bien être conscient du sens des implications considérées. Dans l'exercice 2, deux des trois candidats ont rapidement oublié au cours de l'exercice de tenir compte du support de la loi de X, qui était $[0, 4]$, alors même qu'ils commençaient pourtant bien leur solution en précisant le support de la loi de Y.

Planche 5. L'exercice 1 a permis de révéler, cette année encore, que le calcul matriciel par blocs n'était pas assimilé, ce qui est presque surprenant eu égard à la fréquence des exercices le mettant en jeu lors des sessions d'oral précédentes. Dans l'exercice 2, il aurait été apprécié que les candidats vérifient spontanément l'existence de la suite définie par récurrence. Tous ont eu beaucoup de mal à utiliser l'indication que nous leur donnions, à savoir, de reconstituer la suite (v_n) à partir de la suite de ses accroissements.

Planche 6. La question 1 de l'exercice 1 n'a été traitée par aucun candidat ; tous ont essayé une méthode directe sous des hypothèses supplémentaires (loi à densité, support à nombre fini d'éléments), alors que l'inégalité de Cauchy-Schwarz figurait juste au-dessus. Peu ont été capables de calculer l'espérance de la variable aléatoire indicatrice proposée. Dans l'exercice 2, les candidats, après avoir pourtant montré que Φ était linéaire, n'ont pas pensé à calculer simplement les $\Phi(f_j)$ pour prouver que l'ensemble d'arrivée de Φ était bien E_3 ; au lieu de cela ils ont considéré la forme générale $\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_3 f_3$ des éléments de E_3 et n'ont pas su mener le calcul jusqu'au bout sans erreur. Ils auraient dû remarquer que de toute facon, la fin de l'exercice invitait à se ramener à la représentation matricielle.

Planche 7. Dans l'exercice 1, pour la détermination de ℓ et malgré l'indication qui invitait à la plus grande prudence, tous les candidats ont écrit l'équation de point fixe de f_n et fait tendre n vers l'infini. Après intervention de notre part, une partie des candidats a compris son erreur et su se corriger en utilisant l'indication, l'autre partie des candidats n'a jamais compris ce qui posait problème dans leur raisonnement. Le reste de cet exercice, et le suivant, n'ont pas posé de difficultés dignes d'être signalées.

Planche 8. L'exercice 1, hormis le passage utilisant le théorème de la bijection, a été traité de manière satisfaisante. Beaucoup de candidats se sont fourvoyés dans l'exercice 2 en essayant de traiter les questions (2) et (3) en un seul raisonnement, ce qui est bien sûr possible mais demande de l'attention et du soin. La question (5) était délicate à cause du problème de raccordement en 0 ; on ne s'attendait pas vraiment à ce que les candidats détectent d'eux-mêmes le problème, mais on a apprécié ceux qui, après brève intervention de notre part, comprenaient la nature du problème et trouvaient au final la bonne dimension pour l'espace des solutions.

Planche 9. L'exercice 1 n'a pas posé de difficultés hormis pour la dernière question, pour laquelle nous testions la capacité de réaction des candidats. Dans l'exercice 2, la question (1) conduisait à une suite arithmético-géométrique très simple que la plupart des candidats n'ont pas pensé à expliciter (ou su le faire). Le reste de l'exercice se traitait facilement pour peu que l'on se souvienne ou remarque que $\tan' = 1 + \tan^2$, ce qui n'a pas toujours été le cas.

Planche 10. L'exercice 1 a donné lieu aux énoncés incorrects habituels, comme passer d'une somme de sous-espaces vectoriels à une "différence" d'espaces vectoriels, à l'imge du changement de membre d'un scalaire dans une égalité. Les candidats ont eu du mal à utiliser les deux égalités que l'on supposaient vraies ; peut-être parce qu'ils pensaient que l'une impliquait l'autre. Le manquement le plus patent dans l'exercice 2 est l'ignorance du théorème de la limite de la dérivée ; les candidats ne pensaient qu'à un calcul direct en repassant par la définition de la dérivée comme limite.

Planche 11. Les candidats se sont parfois perdus dans les calculs de l'exercice 1 parce qu'ils considéraient trop de sous-cas ($a = 0$ ou pas, $b = 0$ ou pas, $a = b$ ou pas) et en oubliaient une condition essentielle, $a = (n-1)b$ ou pas. Le jury a peu goûté les affirmations non soutenues par un raisonnement précis, telles que "lorsque $a \neq 0$, $b \neq 0$, et $a \neq b$, les colonnes sont visiblement libres", surtout lorsqu'elles avaient été précédées deux minutes auparavant par l'affirmation d'autorité "lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$, les colonnes sont visiblement liées". Il est à noter que tous les candidats s'appuient sur des résolutions de systèmes linéaires (et en n'exploitant que très peu les symétries du problème) alors que la méthode la plus simple à exposer ici est d'opérer sur les lignes et les colonnes. L'exercice 2 a été bien traité par un candidat ; les deux autres ont oublié les termes croisés $\partial x \partial y$ et $\partial y \partial x$ dans la question (1) et ont été incapables d'indiquer pourquoi on s'attendait à ce qu'ils soient égaux. Ils ignoraient également la condition nécessaire du premier ordre pour un *extremum*, alors qu'elle figure explicitement au programme et qu'ils l'ont donc vue en cours.

Planche 12. Pour traiter l'exercice 1, les candidats ne pensent pas assez aux liens entre fonction de répartition (ou de survie) et probabilité d'une valeur donnée (dans le cas discret). Dans l'exercice 2, si on veut s'épargner un raisonnement par récurrence pour appliquer une formule de Newton (ce n'est pas recommandé mais possible), il faut donner le nom de la formule et bien préciser qu'elle s'appliquer à cause de l'hypothèse de commutativité.

Planche 13. A l'exercice 1 comme à l'exercice 2, questions (1), le théorème des valeurs intermédiaires est encore un objet mystérieux (pour ceux qui le connaissent au moins de nom). On l'a ainsi entendu énoncé comme garantissant que toute fonction continue s'annulait.

Planche 14. Il y avait une petite difficulté à la question (3) de l'exercice 2, que le jury a pu pardonner aux candidats de n'avoir pas vu, à condition qu'ils complètent rapidement leur raisonnement ; à savoir, que le calcul de la limite comme point fixe nécessite d'avoir affaire à une fonction continue, ou tout du moins, prolongeable par continuité. Un manque d'aisance a pu être noté à l'exercice 1, provenant sans doute (et à tort !) de la formulation trop abstraite au goût des candidats, qui mettait en jeu trois variables et trois inconnues.

Planche 15. Cette planche, tout à fait classique, présentait quelques points sur lesquel nous savions que les candidats connaissent des difficultés récurrentes, déjà soulignées maintes fois dans les rapports précédents. C'est le cas pour le calcul de l'espérance d'une variable dont on connaît les espérances conditionnelles (question (2)(c) de l'exercice 1) et la manipulation des fonctions trigonométriques réciproques (exercice 2), dont les candidats ne connaissent souvent même pas l'intervalle de définition exact. Ces difficultés deviennent inextricables lorsque s'ajoute un manque d'aisance à dériver des fonctions composées ou l'ignorance des dérivées des fonctions trigonométriques.

Planche 16. Le jury a noté avec satisfaction que les trois candidats passant sur cette planche ont tous résolu l'exercice 2 avec brio ; le théorème de la limite centrale est sans doute mieux connu que l'an dernier. Dans l'exercice 1, on peut regretter que les candidats ne pensent pas plus spontanément aux comparaisons séries–intégrales et sommes de Riemann ; pire, l'un d'eux a même redécouvert ces approximations au cours de son passage à l'oral. Attention à bien justifier le caractère borné de la fonction f ; l'argumentaire doit préciser que la fonction est continue et définie sur un intervalle et se conclure (par exemple) par l'application du théorème des valeurs intermédiaires ; l'absence d'une des deux hypothèses ou la considération d'une hypothèse superflue constituent une faute qui a d'autant plus d'influence qu'elle est commise au début de l'interrogation et donne le ton.

Planche 17. Les commentaires sur l'exercice 2 sont similaires à ceux déjà formulés pour la planche 11. Dans l'exercice 1, cette année encore, on constate que les candidats ne savent pas retrouver à l'aide des formules d'Euler les égalités donnant par exemple $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. Deux candidats ont par ailleurs dit que puisque $\rho_n \to 1$ alors $(\rho_n)^n \to 1$, ce qui est à rapprocher de l'erreur commise régulièrement dans le sujet d'écrit à l'exercice 2.

Planche 18. Dans l'exercice 1, les candidats, bien que sachant que la série harmonique diverge, ignorent que son terme général est équivalent à $\ln n$, ce qui les handicapaient gravement pour la suite ; les perches tendues par le jury qui proposait une comparaison série–intégrale n'ont pas toujours été saisies. f_n ayant une expression délicate à dériver directement, il ne fallait pas hésiter à penser que se cachait dans la considération de $-\ln f_n$ une indication précieuse pour simplifier les calculs et non une source de complication supplémentaire ; cela n'a été que peu le cas. Un bon exemple de tentative de bluff ou d'escroquerie a été proposé à l'exercice 2 ; un candidat a affirmé qu'il était bien connu que

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x = e^x$$

sans remarquer, évidemment, dans cette formule, ni que le membre de gauche est constant et celui de droite contient une variable muette, ni que l'intégrale de gauche ne converge pas.

Planche 19. L'exercice 2 n'a pas posé de problème à qui savait calculer i^k en fonction de k et connaissait la formule du binôme : pas assez de candidats malheureusement ! L'exercice 1 a été rédigé pour que les deux premières questions puissent être traitées sans aucune difficulté pendant la préparation ; la dernière question, plus délicate, visait à évaluer les capacités du candidats à suivre les indications éventuelles du jury, qui a, par exemple, proposé l'hypothèse de récurrence idoine.