COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Aurélien Garivier, Patricia Reynaud-Bouret

Coefficient : 3 ; **Durée** : 4h ; **Calculatrice interdite**

Commentaires généraux

Nous notons toujours avec beaucoup de satisfaction la progression du niveau des candidats d'année en année. Il y a beaucoup moins de copies blanches. Les candidats semblent avoir bien compris l'intérêt d'assurer une note correcte en mathématiques, les meilleurs pouvant même engranger beaucoup de points sur cette épreuve.

Le sujet de cette année est comme d'habitude long et couvre une large partie du programme. Il est composé d'un exercice d'algèbre (I), d'un exercice d'analyse (II) et d'un long problème (Pb) de probabilité. Bien sûr, nous n'attendons pas que le sujet soit fini. Par exemple, une copie faible notée à 5 parvenait à faire les questions I-1,2,4 II-4 Pb-1, une copie moyenne notée à 10 faisait en plus I-6 II-1,2,3,6 Pb-2,5,6,9.

Le sujet comporte une malheureuse coquille vers la fin du problème et ceci malgré nos nombreuses relectures. Nous en sommes désolés et nous nous efforçons bien sûr d'éliminer de telles erreur bien qu'aucun sujet de concours n'en soit à l'abri. Le jury a bien sûr été particulièrement bienveillant dans cette partie de la correction, et peu de candidats semblent avoir été gênés. En particulier nous n'avons pas noté d'anomalies dans la répartition des notes mais au contraire une élévation du niveau comme en témoigne la moyenne générale (7.5 en 2008, plus de 8 cette année).

Enfin avant de passer aux commentaires détaillés question par question, voici quelques remarques générales qui ne pourront qu'aider le jury à mieux comprendre les étudiants.

- L'expression "fonction positive" est ambiguë. Pour éviter toute erreur d'interprétation, il vaut mieux toujours préciser "strictement positive" ou "positive ou nulle" ou bien sûr utiliser les symboles mathématiques.
- Une confusion entre discret et continu a entraîné des expressions fausses ou incompréhensibles du genre "récurrences sur $s \in \mathbb{R}$", "continuité de suites", etc, chez les plus mauvais candidats.
- Enfin si l'accent est toujours mis sur la rédaction, précisons que la concision est aussi un gage de clarté. Certaines copies sont déraisonnablement bavardes. On peut écrire un corrigé détaillé complet en moins de quatre ou cinq copies doubles : les candidats dépassant les 30 pages pour traiter la moitié des questions noyaient souvent les arguments pertinents dans un déluge de raisonnements au mieux inutiles, au pire faux.

Commentaires détaillés sur les questions

Exercice I

L'exercice I porte sur les polynômes et l'algèbre linéaire. Il a été plutôt bien traité, l'algèbre étant manifestement le point fort des candidats.

1-3. La division euclidienne est au programme ; les cas triviaux des questions 1. et 2. sont souvent faits, la question 3. très rarement. Pour cette dernière, beaucoup ont posé la division et calculé les 4 ou 5 termes dominants du quotient. Cela ne mène pas à la solution ; d'ailleurs, l'énoncé ne demande que de trouver le reste. Si beaucoup savaient bien poser la division euclidienne, une erreur fréquente fut de répondre la fraction rationnelle $(X + 1)/(X - 2)$, d'autres candidats effectuant une division par les puissances croissantes.

4. Cette question est la plus souvent réussie (elle rapporte à elle seule 1,5 point).

5. C'est une conséquence directe de la question 3. Un bon nombre de candidats n'ayant pas réussi la question 3. l'ont quand même traitée, en trouvant et en résolvant la récurrence. Ceux qui ont seulement calculé $A^3, A^4, \ldots$ jusqu'à A^8 n'ont pas eu de point.
6. Etrangement, un nombre non négligeable de candidats notaient systématiquement $zP(A)$ au lieu de $P(A)z$, mais menaient par ailleurs un raisonnement irréprochable. Moins étrangement, beaucoup ne comprenaient manifestement pas les objets manipulés, écrivant des choses comme $P(Az)$, $B \in \mathrm{Ker}(P(A)) \implies P(B) = 0$ ou $S(A)zQ(A)$. Attention aussi à ne pas écrire $P(A) = S(A)Q(A) + r$. On voit toujours des candidats confondant somme directe et intersection vide, ou bien pensant que deux sous-espaces vectoriels ne peuvent être en somme directe que s'ils engendrent l'espace tout entier. La question 6. a été plutôt mieux réussie qu'on ne pouvait le craindre, par contre la question 7. (beaucoup plus subtile) n'a jamais été entièrement traitée.

Exercice II

Cet exercice est de l'analyse la plus pure. Il est écrit de sorte à pouvoir être traité avec le programme seul et sans jamais avoir vu les équations différentielles.

1. $x \mapsto \exp(x) - 1$, $x \mapsto x\exp(x)$ (et ses variantes de la forme $g(x) * \exp(x)$, avec g croissante nulle en 0) et sinh ont été les bonnes réponses les plus fréquentes, mais on trouvait également des candidats malins qui allaient chercher à la question 4. la fonction f_0. Parmi les réponses fausses pas trop farfelues, ont été proposées des fonctions comme tan ou $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ qui ne sont pas définies sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

2-3. Une fois prouvé $w(x) \geq 0$ ou $w(x) = 0$, il ne faut pas oublier de conclure pour g. On trouvait souvent des arguments faux du type : "w est constante, et $x \mapsto \exp(-x)$ ne l'est pas, donc g est nulle" ; ou bien "$g' = g$ a deux solutions $g = 0$ ou $g(x) = \exp(x)$, or $g(0) = 0$ donc g est nulle".

4. La majorité des candidats a oublié de justifier que f_0 est bien de classe C^1. Pour vérifier qu'elle satisfait les conditions énoncées, on peut bien sûr calculer une expression close de f_0, mais c'est inutile voire assez risqué (beaucoup se perdant en chemin). De même, il est inutile de prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-x)dx$. Malgré quelques confusions entre t et x, ceux qui ont essayé de dériver directement f_0 y sont dans l'ensemble bien arrivés. L'expression $t^2\exp(-t) - 0^2\exp(0)$ comme dérivée de l'intégrale, bien que juste ici, révèle une incompréhension des candidats.
5. Il est attendu d'utiliser la question 3. mais on peut aussi adapter le raisonnement du 3. à ce cas particulier.
6. Cette question a été finalement plutôt bien réussie, ce qui montre que les candidats savent utiliser les conclusions des questions antérieures.

7-8. Très peu de candidats se sont aventurés au delà de l'indication. On peut parfois lire "$h \geq 0$ et donc a fortiori $h > 0$". La question 7. était en fait maladroite : l'inégalité n'a pas de sens pour $t = u + 1/h(u)$. Les meilleurs candidats ont toutefois bien compris la contradiction du raisonnement par l'absurde, et ont bien traité les questions 7. et 8.

Problème

Le problème porte sur les chaînes de Markov sans toutefois que leur connaissance soit nécessaire.

1-3. Ces questions étaient quasiment des questions de cours : elles ont été bien réussies, sauf la question 3. où la limite et les conditions proposées étaient souvent farfelues. En particulier, beaucoup trop donnaient la condition $0 \leq r < 1$ qui ne permet pas de conclure dans les questions suivantes. Très peu de candidats ont pensé au cas (très particulier) $|r| \geq 1$ et $u_1 = l$. Pour la question 1., des candidats présentaient un raisonnement par récurrence qui n'en est en fait pas un : on montre la relation de récurrence vérifiée par v_n directement.

4. Cette question est correctement traitée dans l'ensemble ; quand elle est utilisée, il est bien de nommer la formule des probabilités totales.
5. Cette question a donné bien du fil à retordre aux correcteurs. "Expliquer" ne signifie pas "paraphraser" : on attend une justification, pas seulement une reformulation littérale des formules sur

plus ou moins de pages. En particulier, il faut rappeler que c'est parce que tous les livres sont rendus exactement à temps que seuls les livres empruntés la semaine précédente sont manquants.

6. On trouve parfois une confusion entre loi de Bernoulli et loi binomiale. D'autres confondaient k et N. On peut donner l'espérance de la loi binomiale sans démonstration.
7. Conséquence directe des questions 4. et 6., cette question a été plutôt bien réussie.
8. Etrangement, alors que tout le travail avait été fait au préalable, cette question a été assez peu réussie.
9. On pouvait lire une grande variété de réponses. Parmi les réponses les moins fausses, on trouvait souvent la transposée de A, ou bien une erreur dans A_{12} (le coefficient 2 étant oublié).
10. Cette question un peu plus calculatoire a été très peu traitée (mais bien rétribuée).
11. Beaucoup n'ont pas vu le lien avec la question 10. Pour ceux qui l'ont vu, on attend au moins qu'il soit mentionné que A admet au plus 3 valeurs propres. Un trop grand nombre de candidats ont cherché à montrer directement que la famille $\mathcal{B}$ est libre, alors qu'il suffisait d'évoquer un théorème du cours sur les sommes directes d'espaces propres.
12. Belle réussite ! Les chaînes de Markov revenant souvent dans les énoncés d'écrit et d'oral, on constate qu'elles commencent à être mieux connues.

13-15. Ces questions ont été abordées seulement par les meilleurs candidats, bien qu'elles ne présentent pas de difficultés majeures ; la question 13. est calculatoire, sauf si on remarque que u_2 et u_3 ont des composantes de somme nulle.

16-17. Ces deux questions ont souvent été traitées ensemble et assez bien.

18. L'énoncé comporte une faute de frappe : on doit lire $\mathbb{P}(X_n = m)$ et non $\mathbb{P}(X_n = k)$. Les candidats ayant abordé la question ont souvent corrigé d'eux-mêmes, pour les autres les correcteurs ont fait preuve de clémence. Finalement, les candidats moyens à bons ont souvent traité la question.

19-24. Quand elles étaient abordées, ces questions ont été traitées très partiellement. Sans être difficiles, elles nécessitent un certain recul par rapport au problème.