UHCE 654

SESSION 2006

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan - ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Les deux problèmes et l'exercice qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans chacune de ces parties, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Exercice

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0;1]$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \left(\int_0^1 f(x)^{1/n} dx\right)^n.$$

1. On pose pour tout réel y, $\phi(y) = e^y - y$. Donner le tableau de variation de ϕ. Montrer que pour tout réel y, $\phi(y) \geq 1$.
2. Montrer que pour tout réel y, $\phi(y) \leq \phi(|y|)$.
3. Montrer qu'il existe un réel $M \geq 1$ tel que pour tout réel x de $[0;1]$, $(1/M) \leq f(x) \leq M$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$,

$$1 + \frac{\ln(f(x))}{n} \leq f(x)^{1/n} \leq \frac{\ln(f(x))}{n} + \exp\left(\frac{\ln(M)}{n}\right) - \frac{\ln(M)}{n}.$$

5. On pose $I = \int_0^1 \ln(f(x))dx$. Montrer, en utilisant soigneusement les développements limités, que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^I.

Problème I

Préliminaires

Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tous réels a, b de $[-1;1]$, on pose $g_n(a,b) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} a^i b^k$.

(a) Montrer que

$$g_n(1,1) = \sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n\to\infty} [g_n(1,1)/n^2] = 1/2$.

On veut montrer maintenant que si $(a,b) \neq (1,1)$ alors $\lim_{n\to\infty} [g_n(a,b)/n^2] = 0$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel m et tout réel $x \neq 1$, $\sum_{j=0}^{m} x^j = (1-x^{m+1})/(1-x)$.

(c) Conclure dans le cas où $b \neq 1$.

(d) On suppose que $b = 1$. Conclure si $a \neq -1$.

(e) Soit p un entier naturel strictement positif. Montrer enfin que $g_n(-1,1) = p$ si $n = 2p$ et $g_n(-1,1) = p+1$ si $n = 2p+1$. Conclure.

On admettra dorénavant que $\lim_{n\to\infty} [g_n(1,1)/n^2] = 1/2$ et que si $(a,b) \neq (1,1)$ alors $\lim_{n\to\infty} [g_n(a,b)/n^2] = 0$.

Pour tout entier naturel n, on représente le temps qu'il fait au jour n par une variable aléatoire X_n à valeurs dans $\{0,1\}$; X_n vaut 0 s'il ne pleut pas ce jour là et 1 s'il pleut ce même jour. Le cas $n = 0$ correspond à "aujourd'hui", $n = 1$ à "demain", etc. On suppose dans tout le problème que le temps qu'il fait au jour $n+1$ ne dépend que du temps qu'il a fait le jour précédent (jour n) ; c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+2},$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

On suppose de plus qu'il existe deux réels p_0 et p_1 de $[0;1]$ tels que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_0 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0), \\ p_1 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1). \end{aligned}$$

Soit v_0 un réel de $[0;1]$. On suppose que la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est donnée par v_0.

1. (a) Donner la loi de X_0.
   (b) Donner la loi de X_1.

On forme la matrice carrée à coefficients réels 2×2

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - p_0 & p_0 \\ p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix}.$$

On forme aussi la matrice ligne à coefficients réels 1×2

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 - v_0 & v_0 \end{pmatrix}.$$

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $V_n = V_0 Q^n$.

Tournez la page S.V.P.

2. (a) Montrer que $V_1 = \Big(\mathbb{P}(X_1 = 0) \quad \mathbb{P}(X_1 = 1)\Big)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_n = \Big(\mathbb{P}(X_n = 0) \quad \mathbb{P}(X_n = 1)\Big)$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $v_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et a_n, b_n, c_n, d_n les quatre réels tels que

$$Q^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

3. Soit n un entier naturel fixé. On suppose pour cette question seulement que $0 < v_n < 1$. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout entier naturel $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+k} = 0 | X_n = 0) &= a_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+k} = 0 | X_n = 1) &= c_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+k} = 1 | X_n = 0) &= b_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+k} = 1 | X_n = 1) &= d_k. \end{aligned}$$

4. (a) Montrer que 1 est valeur propre de Q et des Q^n et donner un vecteur propre associé.

   (b) Trouver s réel de $[0;1]$, tel que $S = (1-s \quad s)$ vérifie $S = SQ$. Dans quel cas un tel s est-il unique ?

5. (a) Donner une relation de récurrence vérifiée par v_n et la résoudre.

   (b) Discuter l'existence éventuelle d'une limite ℓ pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Supposons que s défini en 4(b) soit unique. Dans quels cas $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers s ?

   (d) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}{n+1}$$

   converge vers s si s défini en 4(b) est unique.

On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq d})$ converge vers une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq d}$ de $\mathbb{M}_{k\times d}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \max\{|a_{i,j}^{(n)} - a_{i,j}|, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d\} = 0.$$

6. (a) Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice A si et seulement si pour tout indice i, j, $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

   (b) On suppose que $(p_0, p_1) \neq (0,0)$ et $(p_0, p_1) \neq (1,1)$. Montrer qu'alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne S défini à la question 4(b) .

   (c) Montrer sous la même condition que $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$M = \begin{pmatrix} 1-s & s \\ 1-s & s \end{pmatrix}.$$

   Indication : on pourra remarquer entre autres que $(a_n, b_n) = (1,0)Q^n$.

7. On suppose dorénavant que s défini en 4(b) est unique. On considère

$$\hat{s}_n = \frac{X_0 + X_1 + \cdots + X_n}{n+1}$$

   comme estimateur de s.

   (a) Montrer que $\mathbb{E}(\hat{s}_n)$ converge vers s quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Posons $r = 1 - p_0 - p_1$. Montrer que pour tous entiers naturels $i \geq 0$ et $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(X_i X_{i+k}) = d_k v_i = \left[r^k(1-s) + s\right]\left[r^i(v_0 - s) + s\right].$$

   Indication : on pourra remarquer que $(c_n, d_n) = (0,1)Q^n$.

   (c) Montrer que $\mathbb{E}([\hat{s}_n - s]^2)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   (d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{s}_n - s| > \varepsilon) = 0.$$

Problème II

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère deux fonctions f et g continues sur $[a, b]$.

1. On se propose tout d'abord de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

(a) Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) + 2\lambda \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \geq 0.$$

(b) En déduire que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie.

(c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur f et g peut-on avoir l'égalité dans l'inégalité ci-dessus ?

2. On note respectivement P et Q les maxima de f et g sur $[a, b]$. On note de même respectivement p et q les minima de f et g sur $[a, b]$. On suppose que p et q sont strictement positifs.

(a) Montrer que la fonction h définie par

$$\forall x \in [a, b], h(x) = \left(g(x) - \frac{Q}{p}f(x)\right)\left(g(x) - \frac{q}{P}f(x)\right)$$

est négative.

(b) On pose

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], \quad F_\lambda(x) = \lambda^2 f^2(x) - \lambda f(x)g(x)\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right) + g^2(x).$$

Montrer qu'il existe λ tel que F_λ soit une fonction positive et qu'il existe λ tel que F_λ soit une fonction négative.

Indication : on pourra montrer que $h = F_{\lambda_0}$ pour λ_0 bien choisi.

(c) Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}} + \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)^2 \geq 4\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

(d) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si les deux fonctions f et g sont constantes.

(e) Réciproquement, supposons dorénavant qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente, montrer qu'alors la fonction h est nulle.

(f) Etudier alors la fonction g/f et conclure.

Indication : on pourra montrer tout d'abord que s'il y a égalité, la fonction g/f ne peut prendre que deux valeurs. On remarquera alors qu'une fonction continue sur $[a, b]$ qui n'a que deux valeurs possibles est en fait constante.

3. Soient $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ deux réels tels que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

On se propose de montrer maintenant l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^\alpha dx\right)^{1/\alpha} \left(\int_a^b |g(x)|^\beta dx\right)^{1/\beta}.$$

(a) Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que si u et v sont deux réels positifs arbitraires

$$uv \leq \frac{u^\alpha}{\alpha} + \frac{v^\beta}{\beta}.$$

Indication : on pourra étudier la fonction $u \mapsto uv - u^\alpha/\alpha$.

(c) En se servant de la question précédente montrer que l'inégalité de Hölder est vraie.
Indication : on pourra poser $u = |f(x)|/\left(\int_a^b |f(y)|^\alpha dy\right)^{1/\alpha}$ *et* $v = |g(x)|/\left(\int_a^b |g(y)|^\beta dy\right)^{1/\beta}$.