14.1 Pour les fonctions suivantes, déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 en tout point et écrire la différentielle au point $(1,-2)$

1. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$
2. $g(x,y,z) = x^2+y^2+2xy^2z$ (diff en $(1,-2,3)$)
3. $u(x,y) = \ln(1-xy)$
4. $v(x,y) = \ln\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$

14.2 On pose $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que les applications partielles de f en $(0,0)$ sont continues.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

14.3 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$, on note

$$f(x,y) = \int_x^y t\ln^2(t)dt$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

14.4 On admet le théorème suivant :

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall t \in I,\ \varphi(t) = (u(t), v(t))$ avec u, v fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, $f \circ \varphi$ est dérivable en t et :

$$\forall t \in I,\ (f\circ\varphi)'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(t^2, te^{-t})$. Calculer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. On note pour tous $x, y > 0$, $f(x,y) = x^k y^\ell$. Pour (x,y) fixé dans $]0,+\infty[^2$, on note $\forall t > 0,\ g(t) = f(tx, ty)$. Calculer $g'(t)$ pour tout $t > 0$.

14.5 Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer les dérivées partielles de f. Vérifier alors l'identité d'Euler.

14.6 Déterminer si les fonctions suivantes admettent des extremums ou non :

1. $f(x,y) = (x-1)^2 - (y+1)^4$
2. $f(x,y) = xe^y + ye^x$
3. $f(x,y) = (x+1)(y+1)(x+y+1)$
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$
5. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2yz+1$

14.7 On pose pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2+2y^2-xz$. Déterminer si f admet un extremum libre, et si f admet un extremum sous la contrainte $z = 2y$.

14.8 On considère un point $A(a,b)$ et une droite D d'équation $ux+vy+c = 0$. Déterminer la distance du point A à la droite D, i.e. déterminer : $\min\{d(A,M),\ M \in D\}$.

14.9 Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$ sous les contraintes $2x - y = 1$ et $x + z = 1$.

14.10 Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{1-z}$ sous la contrainte $x+y+z = 1$.

14.11 Déterminer les extremums de la fonction $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ sous les contraintes $x+y = 2$ et $z+t = 0$.