14.1 Soit X une VAR d'espérance m et une variance v.
On dispose d'un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de X.
On appelle variance empirique de X la variable $W_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$,

où $\overline{X_n}$ est la moyenne empirique de X.

1. Calculer $\mathbb{E}\big[\overline{X_n}\big]$ et $\mathbb{V}\big[\overline{X_n}^2\big]$, et en déduire $\mathbb{E}\big[\overline{X_n}^2\big]$.
2. Calculer $\mathbb{E}\big[W_n\big]$ et en déduire un estimateur sans biais de v.

14.2 Soit X une VAR de loi uniforme sur un intervalle $[0,a]$ où a est un paramètre inconnu, et on dispose de $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de X. On note $\overline{X_n}$ la moyenne empirique de X.

1. Soit $T_n = 2\overline{X_n}$. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a et calculer son risque quadratique.
2. Soit $T'_n = \max(X_1,\dots,X_n)$. Donner la fonction de répartition de T'_n. En déduire une densité de T'_n, puis son biais et son risque quadratique.
3. Soit $T''_n = \dfrac{n+1}{n}T'_n$. Déterminer son biais et son risque quadratique.
4. Pour de grandes valeurs de n, quelle est le meilleur estimateur de a ?

14.3 Lors d'un sondage sur 100 personnes interrogées, 60 pensent voter pour A.
On modélise ce résultat par un échantillon $(X_1,X_2,\dots,X_{100})$ de variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
On cherche à déterminer un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 99%.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la moyenne empirique $F = \dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$
2. On note F^* la variable centrée réduite associée à F. Par quelle loi peut-on approcher celle de F^* ?
   Déterminer t tel que $\mathbb{P}(-t \leqslant F^* \leqslant t) \geqslant 0.99$ et en déduire que
   $$\mathbb{P}\left(F - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10} \leqslant p \leqslant F + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10}\right) \geqslant 0.99$$
3. Montrer que pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0.99, puis en donner une estimation.

14.4 Afin d'étudier la proportion p de consommateurs satisfaits par un produit, on a interrogé 100 consommateurs. 56 d'entre eux ont déclaré être satisfaits par le produit. Donner un intervalle de confiance à 95% de p.

14.5 Dans un scrutin, le dépouillement des n premiers bulletins donne 60% de votes favorables au candidat A.

1. Déterminer n pour que l'on puisse affirmer avec moins de 5% de risque d'erreurs que A obtiendra entre 58% et 62% de voix.
2. On suppose que A obtient effectivement 60% de voix. Trouver la probabilité pour que les partisans de A soient en minorité dans un échantillon donné de 100 électeurs.

14.6 Une usine fabrique des câbles. On suppose que la charge maximale supportée par un câble exprimée en tonnes est une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et 0.5.
Une étude portant sur 50 câbles a donné une moyenne des charges maximales supportées égale à 12.2 tonnes.

1. Déterminer l'intervalle de confiance à 99% de la charge maximale moyenne de tous les câbles fabriqués par l'usine.
2. Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon étudié pour que la longueur de l'intervalle de confiance à 99% soit inférieure ou égale à 0.2 ?