13.1 En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

13.2 On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $\frac{n}{3}$ soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

13.3 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR deux à deux indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre p_i.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

13.4 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de VAR définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant toute une loi uniforme sur $[0, 1]$.
On note pour tout $n \geqslant 1$, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable remarquable.

13.5 On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de Poisson indépendantes de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ? Calculer $\mathbb{P}(S_n \leqslant n)$ en fonction de n.
2. En utilisant le Théorème de la Limite Centrée, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

13.6 Soit X une VAR suivant une loi de poisson de paramètre 40. Calculer $\mathbb{P}(30 < X < 40)$ et $\mathbb{P}(X = 40)$.

13.7 Soit $n \geqslant 2$. On considère n variables aléatoires indépendantes $Z_1, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $M_n = \dfrac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx$.

13.8 Chaque année, un jeune employé effectue, deux fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une VAR X qui suit une loi d'espérance 45 minutes et d'écart-type 10 minutes. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes.
Quelle est la probabilité pour que ce jeune employé passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année ?
(On donne $\dfrac{21\,000 - 460 \times 45}{\sqrt{46\,000}} \simeq 1.4$)

13.9 Un lot de N pots de confiture contient 0.2% de pots avariés. Calculer la probabilité que parmi 1000 pots, il y ait au plus 4 pots avariés.

13.10 Un dé régulier est lancé 9 000 fois. Déterminer la probabilité de l'événement "On a obtenu "6" entre 1400 et 1600 fois".
A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité demandée et commenter le résultat.
On donne $\dfrac{100}{\sqrt{1250}} \simeq 2.83$ et $\dfrac{100.5}{\sqrt{1250}} \simeq 2.84$.