12.1 Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
2. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
3. $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Rappelons que pour montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité, il faut montrer les points suivants :

(i) f est positive sur $\mathbb{R}$

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

1.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} = 4te^{-2t}\mathbb{1}_{(t\geqslant 0)}(t)$$

- La fonction f est clairement positive sur $\mathbb{R}$, puisque $\forall t \geqslant 0, te^{-2t} \geqslant 0$
- – Sur $]-\infty, 0[$, f est la fonction nulle, qui est donc continue.
  – Sur $]0, +\infty[$, f est le produit de deux fonctions continues, donc est continue également.
  – En 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 4te^{-2t} = 0$, donc f est continue également en 0.

  Ainsi, f est bien <u>continue sur $\mathbb{R}$</u>.

  Remarque : cela nous suffit si f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, donc on n'était pas obligé ne vérifier la continuité en 0
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge ?

  Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut 0.

  $\displaystyle\int_{0}^{+} \infty f(t)dt$ converge ?

  La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc uniquement un problème en $+\infty$.

  Soit $A > 0$. On a alors :

$$\int_0^A f(t)dt = \int_0^A 4te^{-2t}dt = \Big[-2te^{-2t}\Big]_0^A + \int_0^A 2e^{-2t}dt = -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$$

  Or, $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1\right) = 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

  Par somme d'intégrales convergente, en utilisant la relation de Chasles, <u>$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.</u>

En conclusion, f est bien une densité de probabilité.

Prenons X une variable aléatoire qui admette f pour densité.
Notons F sa fonction de répartition. Par définition, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Si $x < 0$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 4te^{-2t}dt = 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 = 1 - (2x+1)e^{-2x}$
(il suffit de reprendre le calcul fait pour la convergence de l'intégrale).

En conclusion, la fonction de répartition de X est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (2x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} = \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 \mathbb{1}_{(t \geqslant 0}(t)$$

- La fonction g est clairement positive sur $\mathbb{R}$, puisque $\forall t \geqslant 0, te^{-t/2} \geqslant 0$
- – Sur $]-\infty, 0[$, g est la fonction nulle, qui est donc continue.
  – Sur $]0, +\infty[$, g est le produit de deux fonctions continues, donc est continue également.
  – En 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 = 0$, donc g est continue également en 0.

  Ainsi, g est bien <u>continue sur $\mathbb{R}$</u>.
  Remarque : cela nous suffit si g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, donc on n'était pas obligé ne vérifier la continuité en 0
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ converge ?

  Puisque g est nulle sur $]-\infty, 0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ converge et vaut 0.

  $\displaystyle\int_{0}^{+} \infty g(t)dt$ converge ?
  La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc uniquement un problème en $+\infty$.
  Soit $A > 0$. On a alors :

$$\int_{0}^{A} g(t)dt = \int_{0}^{A} \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 dt = 3\left[-\frac{1}{3}(1-e^{-t/2})^3\right]_0^A = -(1-e^{-A/2})^3 + 1$$

  Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(-(1-e^{-A/2})^3 + 1\right) = 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)dt$ converge et vaut 1.

  Par somme d'intégrales convergente, en utilisant la relation de Chasles, <u>$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et vaut 1.</u>

En conclusion, g est bien une densité de probabilité.

Prenons X une variable aléatoire qui admette g pour densité.
Notons G sa fonction de répartition. Par définition, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$

Si $x < 0$, on a $G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $G(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 dt = 0 - (1-e^{-x/2})^3 + 1 = 1-(1-e^{-x/2})^3$
(il suffit de reprendre le calcul fait pour la convergence de l'intégrale).

En conclusion, la fonction de répartition de X est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-e^{-x/2})^3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} = \frac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t)\mathbb{1}_{(t\geqslant 0)}(t)$$

- La fonction h est clairement positive sur $\mathbb{R}$, puisque $\forall t \geqslant 0, 1+e^t \geqslant 1$, donc $\ln(1+e^t) \geqslant \ln(1) = 0$ et $e^{-t} \geqslant 0$
- – Sur $]-\infty, 0[$, h est la fonction nulle, qui est donc continue.
  – Sur $]0, +\infty[$, h est le produit de deux fonctions continues, donc est continue également.
  – En 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^-} h(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t) = \dfrac{1}{2}$, donc g n'est pas continue en 0.

  Ainsi, g est bien continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, donc sur $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge ?

  Puisque h est nulle sur $]-\infty, 0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge et vaut 0.

  $\displaystyle\int_{0}^{+} \infty h(t)dt$ converge ?
  La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc uniquement un problème en $+\infty$.
  Soit $A > 0$. On a alors :

$$\int_0^A h(t)dt = \int_0^A \frac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t)dt = \frac{1}{2\ln(2)}\int_0^A e^{-t}\ln\left(1+\frac{1}{e^{-t}}\right)dt$$

  On pose un changement de variable $u = e^{-t} \iff t = -\ln(u)$
  $\forall t \in [0, A],\ \varphi(t) = e^{-t}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ et on a : $\forall t \in [0, A], \varphi'(t) = -e^{-t}$, donc $du = -e^{-t}dt$ et $dt = -\frac{1}{u}du$.
  De plus, $t = 0 \iff u = 1$ et $t = A \iff u = e^{-A}$.
  Le changement de variable donne alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\ln(2)}\int_0^A e^{-t}\ln\left(1+\frac{1}{e^{-t}}\right)dt &= \frac{1}{2\ln(2)}\int_1^{e^{-A}} u\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)\left(\frac{-du}{u}\right) \\ &= \frac{1}{2\ln(2)}\int_{e^{-A}}^1 \ln\left(\frac{u+1}{u}\right)du \\ &= \frac{1}{2\ln(2)}\int_{e^{-A}}^1 (\ln(u+1)-\ln(u))\,du \\ &= \frac{1}{2\ln(2)}\Big[(u+1)\ln(u+1)-(u+1)-u\ln(u)+u\Big]_{e^{-A}}^1\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\ln(2)}\left(2\ln(2) - 1 - (e^{-A}+1)\ln(e^{-A}+1) - 1 + Ae^{-A}\right)$$
$$= 1 - \frac{2 + (e^{-A}+1)\ln(e^{-A}+1) - Ae^{-A}}{2\ln(2)}$$
$$\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge et vaut 1.

Par somme d'intégrales convergente, en utilisant la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ converge et vaut 1.

En conclusion, h est bien une densité de probabilité.

Prenons X une variable aléatoire qui admette h pour densité.
Notons H sa fonction de répartition. Par définition, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)dt$$

Si $x < 0$, on a $H(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $H(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t)dt = 1 - \frac{2+(e^{-x}+1)\ln(e^{-x}+1)-xe^{-x}}{2\ln(2)}$
(il suffit de reprendre le calcul fait pour la convergence de l'intégrale).

En conclusion, la fonction de répartition de X est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{2 + (e^{-x}+1)\ln(e^{-x}+1) - xe^{-x}}{2\ln(2)} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

12.2 Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1,2[, \\ \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1,2[\end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1,2[, \\ \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1,2[\end{cases}$$

On sait que f est une densité de probabilité si :
(i) f est positive sur $\mathbb{R}$
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

Pour que la fonction f soit bien positive sur $\mathbb{R}$, il nous faut déjà imposer que $\boxed{a \geqslant 0}$

La fonction f est toujours continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ (elle est nulle sur $]-\infty,1[$ et sur $]2,+\infty[$ et est continue sur $]1,2[$ comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas. Ainsi, pour toute valeur de $a \geqslant 0$, f sera continue sur $\mathbb{R}$ sauf évenutellement en 1 et 2.

Puisque f est nulle sur $]-\infty,1[$ et $]2,+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(t)dt$ convergent et valent 0.

La fonction f est continue sur $]1,2]$: pour la convergence de $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt$, on a donc a priori uniquement un problème en 1.
Or, pour tout $x \in]1,2]$, on a :

$$\int_x^2 f(t)dt = \int_x^2 \frac{a}{\sqrt{t-1}}dt = 2a\int_x^2 \frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt = \left[2a\sqrt{t-1}\right]_x^2 = 2a - 2a\sqrt{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 2a$$

Donc pour toute valeur de $a \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt$ converge et vaut $2a$.

Par somme d'intégrales convergentes, en utilisant la relation de Chasles, on obtient donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge (pour n'importe quelle valeur de a) et vaut $2a$.
Pour que f soit une densité de probabilité, on doit donc imposer que $2a = 1$, i.e. que $a = \dfrac{1}{2}$.

En conclusion :

$$f \text{ densité de probabilité} \iff a = \frac{1}{2}$$

12.3 Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$

Rappelons que pour montrer qu'une fonction F est la fonction de répartition d'une variable à densité, il faut montrer les points suivants :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$
(ii) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$
(iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

1.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- La fonction F est continue sur $]-\infty,0[$ (fonction nulle) et est continue sur $]0,+\infty[$ par produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
  De plus,

  $$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x}\right) = 1 - 1 = 0$$

  donc F est également continue en 0.
  Finalement, <u>F est continue sur $\mathbb{R}$</u>.
- La fonction F est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (fonction nulle, et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$), donc F est de classe <u>$\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$</u>, soit sur $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points.

- On a

$$\forall x \neq 0,\ F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -2\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(-e^{-x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  On remarque donc que $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'(x) \geqslant 0$ donc F croissante sur $]-\infty, 0[$. De plus, $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'(x) \geqslant 0$, donc F croissante sur $]0, +\infty[$. Puisque F est continue en 0, on peut donc affirmer que la fonction F est bien croissante sur $\mathbb{R}$.
- De manière évidente, puisque F est nulle sur $]-\infty, 0[$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

  Or, $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées), on a donc bien

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Finalement, on a bien montré que F était la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

Pour obtenir une densité f de X, il suffit de dériver F là où c'est possible (ici sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) et de compléter par une valeur positive en 0. Une densité possible est donc la fonction f définie par :

$$\forall x \neq 0,\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

- La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto 1+e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)(fonction nulle).
- La fonction F est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geqslant 0$$

  La fonction F est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
- Puisque $\frac{1}{1+e^x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$, on a bien $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- Puisque $\frac{1}{1+e^x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1$.

Finalement, on a bien montré que F était la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

Pour obtenir une densité f de X, il suffit de dériver F là où c'est possible, donc ici sans problème sur $\mathbb{R}$). Une densité possible est donc la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

12.4 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

Pour montrer que X est une variable à densité, il faut montrer que sa fonction de répartition F vérifie :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$)

(ii) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement un nombre fini de points

La fonction F est ici clairement continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions continues sur $]0, +\infty[$). De plus,

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - e^{-x^2/2}) = 1 - 1 = 0$$

donc F est également continue en 0.
Finalement, F est bien continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est ici clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Au final, la fonction F est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points.

Ainsi, X est bien une variable aléatoire à densité.
Pour obtenir une densité f de X, il nous suffit de dériver F là où c'est possible et éventuellement de compléter par des valeurs positives aux points où F n'es pas dérivable. Une densité possible pour X est donc la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12.5 Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dont une densité est :

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

Une variable X de densité f admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente.
Cette même variable admet une variance si et seulement si la variable X admet un moment d'ordre 2, i.e. que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.
Sous ces conditions de convergences, on a :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt, \qquad \mathbb{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - (\mathbb{E}[X])^2$$

1. Soit X une variable qui admette pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt$. Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, on a ; $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t|f(t)dt$ qui converge et vaut 0.

Pour l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |t|f(t)dt$?
Sur $[0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto |t|f(t) = 4t^2e^{-2t}$ est continue, donc on a un problème a priori uniquement en $+\infty$.
Soit $A > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A |t|f(t)dt &= \int_0^A 4t^2e^{-2t}dt \\
&= \Big[-2t^2e^{-2t}\Big]_0^A - 4\int_0^A(-te^{-2t})dt \\
&= -2A^2e^{-2A} + 4\int_0^A te^{-2t}dt \\
&= -2A^2e^{-2A} + \Big[-2te^{-2t}\Big]_0^A + \int_0^A 2e^{-2t}dt \\
&= -2A^2e{-2A} - 2Ae^{-2A} + \Big[-e^{-2t}\Big]_0^A \\
&= -2A^2e^{-2A} - 2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1 \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

(par croissances comparées). Donc $\int_0^{+\infty} |t|f(t)dt$ converge et vaut 1.

Par somme, on en déduit donc que X admet bien une espérance, et de plus,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} |t|f(t) = 1$$

Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)dt$. Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, on a ; $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2f(t)dt$ qui converge et vaut 0.

Pour l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2f(t)dt$?
Sur $[0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto |t|f(t) = 4t^3e^{-2t}$ est continue, donc on a un problème a priori uniquement en $+\infty$.
Soit $A > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2f(t)dt &= \int_0^A 4t^3e^{-2t}dt \\
&= \Big[-2t^3e^{-2t}\Big]_0^A - 6\int_0^A(-t^2e^{-2t})dt \\
&= -2A^3e^{-2A} + \frac{3}{2}\int_0^A 4t^2e^{-2t}dt \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} t^2f(t)dt$ converge et vaut $\frac{3}{2}$.

Par somme, on en déduit donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge. Ainsi, X admet bien une variance (puisqu'elle admet un moment d'ordre 2, et de plus,

$$\mathbb{V}[X] = b\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt\right)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

2. Soit X une variable ayant pour densité la fonction g définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

<u>Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t|g(t)dt$.</u>

La fonction g étant nulle sur $]-\infty, 1[$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} |t|g(t)dt$ converge et vaut 0.

Sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto |t|g(t) = \frac{4\ln(t)}{t^2}$ est continue, donc on a a priori un problème d'intégrabilité uniquement au voisinage de $+\infty$.
Soit $A > 0$. On a :

$$\int_1^A |t|g(t)dt = 4\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^2}dt = 4\left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^A + 4\int_1^A \frac{1}{t^2}dt = -4\frac{\ln(A)}{A} - 4\left[\frac{1}{t}\right]_1^A = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}$$

Ainsi, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A |t|f(t) = 4$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |t|f(t)dt$ converge et vaut 4.

Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|g(t)dt$ converge et donc X admet bien une espérance. On a alors :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_1^{+\infty} tg(t)dt = \int_1^{+\infty} |t|g(t)dt = 4$$

<u>Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)dt$?</u>

La fonction g étant nulle sur $]-\infty, 1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t^2 g(t)dt$ converge et vaut 0.

Sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto t^2 g(t) = \dfrac{4\ln(t)}{t}$ est continue et positive, donc on a un problème a priori uniquement en $+\infty$. Or, pour $t \geqslant e$, on a $\ln(t) \geqslant 1$, et on a alors :

$$\forall t \geqslant e, \quad t^2 g(t) = \frac{4\ln(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t}$$

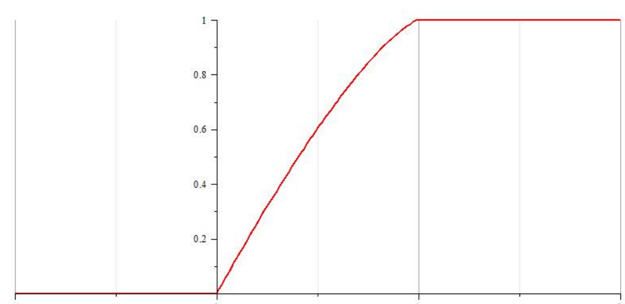
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (intégrale de Riemann), donc par comparaison des fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} 4t^2 g(t)dt$ diverge également.
Puisque l'intégrale $\int_1^e t^2 g(t)dt$ converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2 g(t)$ diverge, et donc X n'admet pas de moment d'ordre 2, et donc pas de variance.

12.6 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y. Construire sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(0.488 < Y \leqslant 1.2)$.

1. La fonction est clairement positive sur $\mathbb{R}$, et continue au moins sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ par opérations sur les fonctions continues.
   De plus, $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ convergent et sont nulles puisque f est nulle sur ces intervalles.
   La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ existe bien également. Par somme d'intégrales convergentes (relation de Chasles), on déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge. De plus :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-t)^{1/3}\,dt = \left[-\frac{4}{3}\frac{(1-t)^{4/3}}{4/3}\right]_0^1 = \left[-(1-t)^{4/3}\right]_0^1 = 1$$
   Ainsi, f est bien une densité de probabilité.
   Autrement dit, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire Y définie sur cet espace telle que Y soit de densité f.
2. Soit F la fonction de répartition de Y. Par définition, on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
   Si $x \leqslant 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
   Si $x \in [0,1]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{4}{3}(1-t)^{1/3}\,dt = 0 + \left[-(1-t)^{4/3}\right]_0^x = 1-(1-x)^{4/3}$.
   Si $x > 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x 0dt = 0+1+0 = 1$. Finalement :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-(1-x)^{4/3} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$



3. Il nous faut calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)$ après avoir montré sa convergence.

   On sait que f est nulle sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, donc les intégrales $\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} tf(t)dt$ convergent et sont nulles. De plus, la fonction $t\mapsto tf(t)$ étant continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 tf(t)dt$ existe bien.

$$\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 \frac{4}{3}t\,(1-t)^{1/3}\,dt=\Big[-t\,(1-t)^{4/3}\Big]_0^1+\int_0^1(1-t)^{4/3}=\Big[-\frac{3}{7}(1-t)^{7/3}\Big]_0^1=\frac{3}{7}$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)$ est donc convergente par somme (relation de Chasles). Ainsi Y admet bien une espérance et on a :

$$\mathbb{E}[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt=\int_0^1 tf(t)dt=\frac{3}{7}$$

4. On nous demande :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0.488<Y\leqslant 1.2)&=F(1.2)-F(0.488)=1-F(0.488)=1-\left(1-(1-0.488)^{4/3}\right)=(0.512)^{4/3}\\&=(512.10^{-3})^{4/3}=(2^9)^{4/3}.10^{-4}=2^{12}.10^{-4}=0.4096\end{aligned}$$

12.7 Soit X une VAR qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$. Montrer que X admet une espérance et une variance et la calculer.

X suit une loi uniforme sur $[a,b]$. On connaît donc une densité f de X :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } t\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Puisque X est à support borné $[a,b]$ et que f est continue sur le segment $[a,b]$, cela assure l'existence des moments de la variable X. Autrement dit, X admet bien une espérance et une variance.

$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b tdt=\frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b t^2dt=\frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Ainsi

$$\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{4(a^2+ab+b^2)-3(a^2+b^2+2ab)}{12}=\frac{a^2+b^2-2ab}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

12.8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y=\sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

On sait que X suit une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Autrement dit, on connaît une densité de X :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f_X(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$$

et la fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Soit $Y = \sqrt{X}$. Remarquons déjà que X prend bien ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ce qui permet de bien définir Y.

   Notons F_Y la fonction de répartition de Y.
   Puisque $X(\Omega) = [0, +\infty[$ et que $t \mapsto \sqrt{t}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$, on a donc $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. On peut donc déjà dire que
   $$\forall x \leqslant 0,\ \mathbb{P}(Y \leqslant x) = 0$$
   D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$, On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x^2) = F(x^2) = 1 - \lambda e^{-\lambda x^2}$$
   On a donc la fonction de répartition de Y :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   On remarque que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit donc que Y est une variable aléatoire à densité. Une densité possible de Y est la fonction f_Y définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Notons $Z = X^2$. Notons F_Z la fonction de répartition de Z.
   On a directement $Z(\Omega) = [0, +\infty[$, donc déjà
   $$\forall x \leqslant 0,\ \mathbb{P}(Z \leqslant x) = 0$$
   D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$,
   $$\mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) = 1 - \lambda e^{-\lambda \sqrt{x}}$$
   On a donc la fonction de répartition de Z :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   On remarque que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit donc que Z est une variable aléatoire à densité. Une densité possible de Z est la fonction f_Z définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Notons $U = X^3$. Notons F_U la fonction de répartition de U.
   Puisque $X(\Omega) = [0, +\infty[$, on a directement $U(\Omega) = [0, +\infty[$. On a donc
   $$\forall x \leqslant 0,\ \mathbb{P}(U \leqslant x) = 0$$
   D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$,
   $$\mathbb{P}(U \leqslant x) = \mathbb{P}(X^3 \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x^{1/3}) = F(x^{1/3}) = 1 - \lambda e^{-\lambda x^{1/3}}$$

On a donc la fonction de répartition de U :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On remarque que F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit donc que U est une variable aléatoire à densité. Une densité possible de U est la fonction f_U définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{-2\lambda}{3} x^{-2/3} e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{12.9}}$ Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F.
On note $Y = F(X)$. Cherchons la fonction de répartition de Y, notée G :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(F(X) \leqslant x)$$

Or, F est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on sait donc que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[=]0,1[$.
Notons F^{-1} la bijection réciproque de F. On a donc $F^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$.

Déjà on voit donc que $Y(\Omega) =]0,1[$, puisque $t \mapsto F(t)$ est à valeurs dans $]0,1[$, donc déjà on a :

$$\forall x \leqslant 0,\ G(x) = 0, \qquad \forall x \leqslant 1,\ G(x) = 1$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]0,1[$,

$$G(x) = \mathbb{P}(F(X) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît donc une loi uniforme sur $[0,1]$:

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$$

$\boxed{\textbf{12.10}}$ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité. Etudier l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et une densité de Y. La variable Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

1.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

La fonction F est :
– continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas
– de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas
– vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \geqslant 0$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$
– $F(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{e^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
– $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Donc F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
Pour obtenir une densité f de X, il suffit de dériver F là où peut la dériver (ici on peut dériver sur $\mathbb{R}$), donc une densité de X est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

Etudions l'existence de l'espérance et de la variance de X.
Regardons directement si X admet un moment d'ordre 2, autrement dit si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.

La fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, on a donc a priori un problème en $+\infty$ et $-\infty$.

$$t^2 f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 e^{-t}$$

Or, $t^4 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $t^2 e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, par négligeabilité puis par équivalence des fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.

$$t^2 f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \underset{t\to-\infty}{\sim} t^2 e^{t}$$

Or, pour tout $A < 0$, on a :
$$\int_A^1 t^2 e^t = \Big[t^2 e^t\Big]_A^1 - \int_A^1 t e^t = e - A^2 e^A - \Big[t e^t\Big]_A^1 + \int_A^1 e^t dt = -A^2 e^A - A e^A + e - e^A \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} e$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 t^2 e^t dt$ converge, et par équivalence des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 t^2 f(t)$ converge également.

Par somme (relation de Chasles), l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)$ converge bien, autrement dit X admet un moment d'ordre 2, donc en particulier une espérance et une variance.

2. On pose $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.
Déjà remarquons que Y est bien définie puisque $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 0$.

Notons G la fonction de répartition de Y. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}$ est croissante (il suffit de regarder la dérivée) et est à valeurs dans $]-1,1[$, donc on a $Y(\Omega) =]-1,1[$.
On a donc déjà :
$$\forall x \leqslant -1,\ \mathbb{P}(Y \leqslant x) = 0, \qquad \forall x \geqslant 1,\ \mathbb{P}(Y \leqslant x) = 1$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\frac{e^X-1}{e^X+1} \leqslant x\right) \\
&= \mathbb{P}\left((e^X - 1 \leqslant xe^X + x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(e^X(1-x) \leqslant 1+x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(e^X \leqslant \frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (\text{car } 1-x>0) \\
&= \mathbb{P}\left(X \leqslant \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) \\
&= F\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{2}
\end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1+x}{2} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Autrement dit, Y suit une loi uniforme sur $[-1,1]$.

On sait alors directement que Y admet une espérance qui est $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1-(-1)}{2} = 0$.

12.11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. La variable X admet-elle une espérance ?
3. Soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et ensuite une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?
4. Soit $Z = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Z et ensuite une densité de Z.

1. La fonction f est clairement positive et continue sur $\mathbb{R}$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge ?
   Sur $[0,+\infty[$, f est continue, donc on a un problème uniquement en $+\infty$:
   $$\forall A>0,\ \int_0^A \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \left[\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(t)\right]_0^A = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
   Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $1/2$.
   De même, sur $]-\infty,0]$, f est continue, donc on a un problème uniquement en $+\infty$:
   $$\forall B>0,\ \int_B^0 \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \left[\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(t)\right]_B^0 = -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(B) \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ converge et vaut $1/2$.
   Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.
   On a donc bien montré que f est une densité de probabilité.

2. Pour savoir si X admet une espérance, il faut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt$ converge. Or : $|t|f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi t}$ et on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (intégrale de Riemann), donc par équivalence de fonctions positives, on sait déjà que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |t|f(t)dt$ diverge, donc X n'admet pas d'espérance.
3. Commençons déjà par déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt$$

Or, pour tout $A < 0$,

$$\int_A^x \frac{1}{1+t^2}dt = \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(A) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(x)$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(x)\right) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\text{Arctan}(x)}{\pi}}$$

Soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Déjà remarquons que $X(\Omega) = \mathbb{R}$, mais puisque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, on peut donc dire que presque-sûrement $X(\Omega) = \mathbb{R}^*$, et donc Y est définie presque-sûrement, et $Y(\Omega) = \mathbb{R}^*$.
Alors, notons F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right)$$

Or, rappelons que :

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} \ \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont de même signe}$$
$$a \leqslant b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{n} \ \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont de signes opposés}$$

1er cas : $x < 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x < 0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{x} \leqslant X \leqslant 0\right) &= F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

2ème cas : $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left([X \leqslant 0] \cup \left[0 < \frac{1}{X} \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) + \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{x}\right) &= F_X(0) + 1 - \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{x}\right)\\ &= F_X(0) + 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(on prolonge en 0 par continuité, puisque F_Y doit être croissante et qu'ici $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = \dfrac{1}{2}$)
Par composition, F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$, donc Y est bien encore une variable à densité.
Pour obtenir une densité de Y, il suffit de dériver la fonction de répartition F_Y là où c'est possible.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F_Y'(x) = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

Ainsi, Y admet également comme densité f (la densité de Y coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*$, donc quitte à rajouter un point en 0, f est bien également une densité de Y). Autrement dit, Y et X suivent la même loi.

4. Soit F_Z la fonction de répartition de Z.
On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$, donc $Z(\Omega) = [0, +\infty[$, donc déjà $\forall x \leqslant 0,\ \mathbb{P}(Z \leqslant x) = 0$.
Par ailleurs, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x) &= \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) \\ &= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(\sqrt{x})\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(-\sqrt{x})\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(\sqrt{x}) - \text{Arctan}(-\sqrt{x})\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}(\sqrt{x}) - \text{Arctan}(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On remarque que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et que F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$, donc Z est une variable à densité. De plus, une densité de Z est par exemple la fonction f_Z donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si} x > 0 \end{cases}$$

12.12 Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } x \in [-\ln(2), \ln(2)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

1. Remarquons déjà que $X(\Omega) = [-\ln(2), \ln(2)]$, donc on sait déjà que :

$$\forall x < -\ln(2),\ F(x) = 0, \qquad \forall x > \ln(2),\ F(x) = 1$$

De plus, pour tout $x \in [-\ln(2), 0]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\ln(2)} 0dt + \int_{-\ln(2)}^{x} e^t dt \\ &= \Big[e^t\Big]_{-\ln(2)}^{x} \\ &= e^x - e^{-\ln(2)} \end{aligned}$$

$$= e^x - \frac{1}{2}$$

Enfin, pour tout $x \in [0, \ln(2)]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\ln(2)} 0dt + \int_{-\ln(2)}^{0} e^t dt + \int_{0}^{x} e^{-t} dt \\ &= \Big[e^t\Big]_{-\ln(2)}^{0} + \Big[-e^{-t}\Big]_{0}^{x} \\ &= 1 - e^{-\ln(2)} - e^{-x} + 1 \\ &= \frac{3}{2} - e^{-x} \end{aligned}$$

En résumé, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(2) \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-\ln(2), 0] \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } x \in [0, \ln(2)] \\ 1 & \text{si } x > \ln() \end{cases}$$

2. Puisque $X(\Omega) = [-\ln(2), \ln(2)]$, on en déduit directement que $Y(\Omega) = [0, \ln(2)]$.
En notant G la fonction de répartition de Y, on en déduit donc déjà que :

$$\forall x \leqslant 0,\ G(x) = 0, \qquad \forall x \geqslant \ln(2),\ G(x) = 1$$

De plus, pour tout $x \in [0, \ln(2)]$,

$$G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(|X| \leqslant x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = F(x) - F(-x) = \left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right) - \left(e^{x} - \frac{1}{2}\right) = 2 - e^{-x} - e^{x}$$

En résumé, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 - e^{-x} - e^{x} & \text{si } x \in [0, \ln(2)] \\ 1 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$$

Remarquons que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}^1$ au moins que $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln(2)\}$, donc Y est bien une variable aléatoire à densité.
Une densité de Y est par exemple, la fonction g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} - e^{x} & \text{si } x \in [0, \ln(2)] \\ 0 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{12.13}}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Déterminer α pour que $\mathbb{P}(X > \alpha) = \mathbb{P}(X \leqslant \alpha)$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On connaît une densité de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et sa fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On cherche donc α tel que $\mathbb{P}(X > \alpha) = \mathbb{P}(X \leqslant \alpha)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > \alpha) = \mathbb{P}(X \leqslant \alpha) &\iff 1 - \mathbb{P}(X \leqslant \alpha) = \mathbb{P}(X \leqslant \alpha) \\ &\iff 2\mathbb{P}(X \leqslant \alpha) = 1 \\ &\iff F(\alpha) = \frac{1}{2} \\ &\iff 1 - e^{-\lambda\alpha} = \frac{1}{2} (\text{car nécessairement } \alpha > 0) \\ &\iff e^{-\lambda\alpha} = \frac{1}{2} \\ &\iff -\lambda\alpha = -\ln(2) \\ &\iff \alpha = \frac{\ln(2)}{\alpha} \end{aligned}$$

12.14 Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $[-1,3]$. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $[-1,3]$ (intervalle de longueur 4). On connaît donc une densité de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [-1,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [-1,3] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Soit $Y = X^2$ et notons G la fonction de répartition de Y.
Puisque $X(\Omega) = [-1,3]$, on en déduit que $Y(\Omega) = [0,9]$. On a donc déjà :

$$\forall x \leqslant 0,\ G(x) = 0, \qquad \forall x \geqslant 9, G(x) = 1$$

Soit $x \in [0,9]$.

$$G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$$

1er cas : si $x \in [0,1]$, alors $G(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{4} - \dfrac{-\sqrt{x}+1}{4} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.
2ème cas : si $x \in [1,9]$, alors $G(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{4} - 0 = \dfrac{\sqrt{x}+1}{4}$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{4} & \text{si } x \in [1,9] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 9 \end{cases}$$

Remarquons que G est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1,9\}$, donc Y est une variable aléatoire à densité.
De plus, une densité de Y est donné par exemple par la fonction g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1] \\ \dfrac{1}{8\sqrt{x}} & \text{si } x \in]1,9[\\ 0 & \text{si } x \geqslant 9 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{12.15}}$ Soit X une variable aléatoire strictement positive et soit $\lambda > 0$. On définit les variables aléatoires U et V par :

$$U = 1 - X, \qquad V = -\frac{\ln(X)}{\lambda}$$

1. Déterminer les lois de U et V si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
2. Déterminer la loi de X si V suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Supposons que X suive une loi uniforme sur $[0, 1]$. Une densité de X est donc donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et sa fonction de répartition est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $U = 1 - X$. On a déjà $U(\Omega) = [0, 1]$, et donc, en notant F_U la fonction de répartition de U :

$$\forall x \leqslant 0,\ F_U(x) = 0, \quad \forall x \geqslant 1,\ F_U(x) = 1$$

De plus, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U \leqslant x) = \mathbb{P}(1-X \leqslant x) = \mathbb{P}(X \geqslant 1-x) = 1-\mathbb{P}(X \leqslant 1-x) = 1-F_X(1-x) = 1-(1-x) = x = F_X(x)$$

On remarque donc que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = F_X(x)$, donc U et X suivent la même loi, une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Soit $V = -\frac{\ln(X)}{\lambda}$. Déjà remarquons que puisque $X(\Omega) = [0, 1]$, et qu'on a $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, on peut supposer que presque sûrement $X(\Omega) =]0, 1]$, donc la variable V est bien définie (presque sûrement). De plus, puisque $t \mapsto -\frac{\ln(t)}{\lambda}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$, on en déduit que $V(\Omega) = [0, +\infty[$.
En notant F_V la fonction de répartition de V :

$$\forall x \leqslant 0,\ F_V(x) = 0$$

De plus, pour tout $x \geqslant 0$,

$$F_V(x) = \mathbb{P}(V \leqslant x) = \mathbb{P}\left(-\frac{\ln(X)}{\lambda} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(\ln(X) \geqslant -\lambda x) = \mathbb{P}(X \geqslant e^{-\lambda x}) = 1 - F_X(e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$$

On reconnaît donc que V suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. Supposons que V suive une loi exponentielle de paramètre λ. Une densité de V est donc donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et sa fonction de répartition est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On sait que $V = -\frac{\ln(X)}{\lambda}$, donc autrement dit $X = e^{-\lambda V}$. Déjà remarquons que puisque $V(\Omega) = [0, +\infty[$, on a $X(\Omega) =]0, 1]$
En notant F_X la fonction de répartition de X, on a donc déjà :
– $\forall x \leqslant 0,\ F_X(x) = 0$
– $\forall x \geqslant 1,\ F_X(x) = 1$
Enfin, pour tout $x \in]0, 1]$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(e^{-\lambda V} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(-\lambda V \leqslant \ln(x)) = \mathbb{P}(V \geqslant -\frac{\ln(x)}{\lambda}) = 1 - F_V(-\frac{\ln(x)}{\lambda}) = 1 - \left(1 - e^{\lambda \frac{\ln(x)}{\lambda}}\right) =$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

et on a donc montré que X suit une loi uniforme sur $]0, 1]$, et donc presque sûrement une loi uniforme sur $[0, 1]$.

$\boxed{\textbf{12.16}}$ Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$. On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Déterminer la loi de Y_n.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$: une densité commune est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et leur fonction de répartition est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [a, b]$, on a encore $Y_n(\Omega) = [a, b]$. Si on note G la fonction de répartition de Y_n, on a donc :

$$\forall x \leqslant a,\ G(x) = 0, \qquad \forall x \geqslant b,\ G(x) = 1$$

Soit à présent $x \in [a, b]$. Alors :

$$\begin{aligned} G(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\mathbb{P}(X_2 \leqslant x) \times \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \text{ (par indépendance)} \\ &= F(x)F(x) \times \cdots \times F(x) \text{ (car les } X_i \text{ suivent la même loi)} \\ &= (F(x))^n \\ &= \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \end{aligned}$$

12.17 Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. On suppose que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On note $Y = \text{Ent}(X)$ (partie entière de X).

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Y]$ existe si et seulement si $\mathbb{E}[X]$ existe.
3. Montrer que si $\mathbb{E}[X]$ existe, alors :
$$\mathbb{E}[Y] \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y] + 1$$

1. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et que $Y = \text{Ent}(X)$, on en déduit que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$, donc en particulier Y est une variable discrète.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, en notant F la fonction de répartition de X,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(\text{Ent}(X) = k)\\ &= \mathbb{P}(k \leqslant X < k+1)\\ &= F(k+1) - F(k)\\ &= \int_{-\infty}^{k+1} f(t)dt - \int_{-\infty}^{k} f(t)dt\\ &= \int_{k}^{k+1} f(t)dt\end{aligned}$$

2. Rappelons que, sous réserve de convergence,
$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} kf(t)dt$$
   Rappelons également que, sous réserve de convergence
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k} k+1tf(t)dt$$
   - On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}&\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k, k+1], \qquad k \leqslant t \leqslant k+1\\ \Longrightarrow &\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k, k+1], \qquad kf(t) \leqslant tf(t) \leqslant (k+1)f(t)\\ \Longrightarrow &\forall k \in \mathbb{N}, \int_{k}^{k+1} kf(t)dt \leqslant \int_{k}^{k+1} tf(t)dt \leqslant \int_{k}^{k+1} (k+1)f(t) \quad (*)\end{aligned}$$
     et signalons que les trois termes étant positifs.
   - Si $\mathbb{E}[Y]$ existe, alors la série $\sum_{k\geqslant 0} \int_{k}^{k+1} kf(t)dt$ converge, et puisqu'on sait que la série $\sum_{k\geqslant 0} \int_{k}^{k+1} f(t)dt$ existe également (et vaut 1, par définition puisque f est une densité de probabilité), on a par somme de séries convergentes que $\sum_{k\geqslant 0} \int_{k}^{k+1} (k+1)f(t)dt$ converge.
     La deuxième inégalité dans $(*)$ prouve alors, par comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum_{k\geqslant 0} \int_{k}^{k+1} tf(t)dt$ converge, autrement dit que $\mathbb{E}[X]$ existe.

- Si $\mathbb{E}[X]$ existe, alors la série $\sum_{k\geqslant 0}\int_k^{k+1} tf(t)dt$ converge et la première inégalité dans $(*)$ prouve alors, par comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum_{k\geqslant 0}\int_k^{k+1} kf(t)dt$ converge, autrement dit que $\mathbb{E}[Y]$ existe.

3. Montrer que si $\mathbb{E}[X]$ existe, alors $\mathbb{E}[Y]$ existe également, et en remplaçant dans $(*)$ par les valeurs, sachant que l'intégrale $\sum_{k\geqslant 0}\int_k^{k+1} f(t)dt$ converge vers 1 par définition de f densité de probabilité, on obtient bien :

$$\mathbb{E}[Y] \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y] + 1$$

12.18 On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale de paramètres inconnus $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Au cours d'un entraînement, on constate que :
– 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
– 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.
A l'aide des tables de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

Soit X la variable aléatoire égale à la distance parcourue par le javelot. On sait donc que X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On sait que

$$\mathbb{P}(X > 75) = \frac{1}{10}, \qquad \mathbb{P}(X < 50) = \frac{1}{4}$$

On aimerait utiliser les tables de la fonction de répartition de la loi normale. Or ces tables ne donnent que celles de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On doit donc créer une loi normale centrée réduite à partir de X.

Posons $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ la variable centrée réduite associée à X. On sait que Y suit alors une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 75) &= \mathbb{P}(X - m > 75 - m)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{75-m}{\sigma}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Y > \frac{75-m}{\sigma}\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de Y suivant la loi $\mathcal{B}(0,1)$.

On cherche donc m et σ^2 tels que

$$1 - \Phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{10} \Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right) = \frac{9}{10}$$

Ainsi, la table donne que $\boxed{\dfrac{75-m}{\sigma} \simeq 1.28}$

De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<50)&=\mathbb{P}(X-m<50-m)\\&=\mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}<\frac{50-m}{\sigma}\right)\\&=\mathbb{P}\left(Y<\frac{50-m}{\sigma}\right)\\&=\Phi\left(\frac{50-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

On cherche donc m et σ^2 tels que

$$\Phi\left(\frac{50-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{4}$$

Or, la table ne contient pas la valeur 0.25, donc on utilise la propriété importante de Φ :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

On a donc

$$\Phi\left(\frac{50-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{4}\iff 1-\Phi\left(\frac{m-50}{\sigma}\right)=\frac{1}{4}\iff\Phi\left(\frac{m-50}{\sigma}\right)=\frac{3}{4}$$

Ainsi, la table donne que $\boxed{\dfrac{m-50}{\sigma}\simeq 0.67}$

On résout donc finalement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{75-m}{\sigma}\simeq 1.28\\ \dfrac{m-50}{\sigma}\simeq 0.67\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}75-m\simeq 1.28\sigma\\ m-50\simeq 0.67\sigma\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}m\simeq 58.59\\ \sigma\simeq 12.82\end{array}\right.$$

La longueur moyenne parcourue par le javelot est donc d'environ 58.59 mètres et l'écart-type est d'environ 12.82