12.1 Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
2. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
3. $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{2\ln(2)}e^{-t}\ln(1+e^t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

12.2 Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1,2[, \\ \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1,2[\end{cases}$ soit une densité de probabilité.

12.3 Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$

12.4 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

12.5 Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dont une densité est :

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

12.6 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y. Construire sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(0.488 < Y \leqslant 1.2)$.

12.7 Soit X une VAR qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$. Montrer que X admet une espérance et une variance et la calculer.

12.8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

12.9 Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

12.10 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité. Etudier l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et une densité de Y. La variable Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

12.11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. La variable X admet-elle une espérance ?
3. Soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et ensuite une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?
4. Soit $Z = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Z et ensuite une densité de Z.

12.12 Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } x \in [-\ln(2), \ln(2)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

12.13 Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Déterminer α pour que $\mathbb{P}(X > \alpha) = \mathbb{P}(X \leqslant \alpha)$.

12.14 Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $[-1, 3]$. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

12.15 Soit X une variable aléatoire strictement positive et soit $\lambda > 0$. On définit les variables aléatoires U et V par :

$$U = 1 - X, \qquad V = -\frac{\ln(X)}{\lambda}$$

1. Déterminer les lois de U et V si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
2. Déterminer la loi de X si V suit une loi exponentielle de paramètre λ.

12.16 Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[a, b]$. On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Y_n.

12.17 Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. On suppose que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On note $Y = \text{Ent}(X)$ (partie entière de X).

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Y]$ existe si et seulement si $\mathbb{E}[X]$ existe.
3. Montrer que si $\mathbb{E}[X]$ existe, alors :

$$\mathbb{E}[Y] \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y] + 1$$

12.18 On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale de paramètres inconnus $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Au cours d'un entraînement, on constante que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

A l'aide des tables de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.