11.1 Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t\ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$?
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^2(n)}$.
4. Déterminer de même la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^\beta(n)}$, $(\beta>1)$.

1. La fonction $f : t\mapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Il y a un problème uniquement en $+\infty$.
   Puisque $f(t)$ est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)^2}$, on va essayer de calculer une primitive.
   Pour $A>2$, on a :
   $$\int_2^A f(t)dt = -\int_2^A -\frac{\frac{1}{t}}{(\ln(t))^2}dt = -\left[\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^A = -\frac{1}{\ln(A)}+\frac{1}{\ln(2)} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln(2)}$$
   Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
2. La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et
   $$\forall t\geqslant 2,\ f'(t)=\frac{-(\ln t)^2-2\ln(t)}{t^2(\ln t)^4}=\frac{-(\ln(t)+2)}{t^2(\ln(t))^3}\leqslant 0$$
   Ainsi, la fonction f est décroissante sur $[2,+\infty[$ et on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$.

t	2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$f(2)$ $\searrow$	0

3. D'après les questions précédentes, la fonction f est une fonction continue, décroissante et positive sur $[2,+\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$, c'est-à-dire que la série est convergente.
4. Soit $\beta>1$. Posons $\forall t\geqslant 2,\ g(t)=\frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$. On prend comme modèle les questions 1,2,3.
   La fonction $g : t\mapsto \dfrac{1}{t\ln^\beta(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$. Il y a un problème uniquement en $+\infty$.
   Puisque $g(t)$ est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)^\beta}$, on va essayer de calculer une primitive.
   Pour $A>2$, on a :
   $$\int_2^A f(t)dt = \int_2^A \frac{\frac{1}{t}}{(\ln(t))^\beta}dt = \left[\frac{1}{-\beta+1}\frac{1}{(\ln(t))^{\beta-1}}\right]_2^A = -\frac{1}{(\ln(A))^{\beta-1}}+\frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.

La fonction g est dérivable sur $[2,+\infty[$ et

$$\forall t \geqslant 2,\ g'(t) = \frac{-\left((\ln(t))^\beta + t\beta(\ln(t))^{\beta-1}\right)}{t^2(\ln(t))^{2\beta}} \leqslant 0$$

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[2,+\infty[$ et on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

t	2	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	
$g(t)$	$g(2)$ $\searrow$	0

D'après l'étude précédente, la fonction g est une fonction continue, décroissante et positive sur $[2,+\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)dt$, c'est-à-dire que la série est convergente.

$\boxed{\textbf{11.2}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et la calculer.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge.

1. Soit $n \geqslant 1$ fixé. Convergence de $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{t^2}dt$?

   La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{1/t}}{t^2}$ est continue sur $[n,+\infty[$, donc le problème se situe en $+\infty$. Or, pour tout $A > n$, on a :
   $$\int_n^A \frac{e^{1/t}}{t^2}dt = \Big[-e^{1/t}\Big]_n^A = -e^{1/A} + e^{1/n} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1/n} - 1$$
   et donc l'intégrale I_n est convergente et on a :
   $$I_n = e^{1/n} - 1$$

2. Puisque $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :
   $$I_n = e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

3. La fonction f est une fonction continue et positive sur $[1,+\infty[$. De plus, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et que la fonction exponentielle est croissante, par composition, la fonction $t \mapsto e^{1/t}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, la fonction f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

   On a montré précédemment que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente, donc d'après le Théorème de Comparaison Série-Intégrale, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente.

11.3 Déterminer les natures des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{\ln(n)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^2}{e^n}$ à l'aide de comparaisons à des intégrales.

On peut très bien montrer les natures des séries à l'aide de comparaisons usuelles des termes généraux des suites. Utilisons ici des comparaisons série-intégrales.

1. Posons $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ qui est une fonction continue et positive sur $[3,+\infty[$.
   De plus, puisque f est dérivable sur $[3,+\infty[$, on a :

$$\forall t \geqslant 3,\ f'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2} \leqslant 0$$

   donc la fonction f est décroissante sur $[3,+\infty[$. Ainsi, par le théorème de comparaison série-intégrale, on en déduit que

$$\sum_{n\geqslant 3}\frac{\ln(n)}{n} \text{ est de même nature que } \int_3^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}dt$$

   Or, pour tout $A > 3$, on a

$$\int_3^A \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_3^A = \frac{1}{2}\left((\ln(A))^2 - (\ln(3))^2\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   Ainsi, puisque $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{\ln(n)}{n}$ diverge également.

2. Posons $g : t \mapsto \frac{t^2}{e^t} = t^2e^{-t}$ qui est une fonction continue et positive sur $[2,+\infty[$.
   De plus, puisque t est dérivable sur $[2,+\infty[$, on a :

$$\forall t \geqslant 2,\ g'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = (2-t)te^{-t} \leqslant 0$$

   donc la fonction t est décroissante sur $[2,+\infty[$. Ainsi, par le théorème de comparaion série-intégrale, on en déduit que

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^2}{e^n} \text{ est de même nature que } \int_2^{+\infty}\frac{t^2}{e^t}dt$$

Or, pour tout $A > 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_2^A t^2 e^{-t} dt &= \Big[-t^2 e^{-t} \Big]_2^A + 2\int_2^A t e^{-t} dt \\
&= -A^2 e^{-A} + 4e^{-2} + 2\left(\Big[-t e^{-t} \Big]_2^A + \int_2^A e^{-t} dt \right) \\
&= -A^2 e^{-A} + 4e^{-2} - 2Ae^{-A} + 4e^{-2} + \Big[-e^{-t} \Big]_2^A \\
&= -\frac{A^2}{e^A} + 9e^{-2} - 2\frac{A}{e^A} - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 9e^{-2}
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^2}{e^t} dt$ converge, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^2}{e^n}$ converge également.

11.4 Etudier les convergences des suites définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

1.
$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \dfrac{1}{1+t}$.
On reconnaît donc la somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0,1]$ pour la subdivision régulière $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, on sait donc que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \Big[\ln(1+t) \Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \boxed{\ln(2)}$$

2.
$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.
On reconnaît donc la somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0,1]$ pour la subdivision régulière $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, on sait donc que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \Big[\mathrm{Arctan}(t) \Big]_0^1 = \mathrm{Arctan}(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

3.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$.
On reconnaît donc la somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0,1]$ pour la subdivision régulière $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, on sait donc que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

4. $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$?
Puisque $\forall n \geqslant 1, u_n > 0$, posons $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \ln(u_n)$. On a alors pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right) &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\ln((n+1)(n+2)\cdots(2n)) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\left(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)\right) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(n)+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $\forall t \in [0,1],\ f(t) = \ln(1+t)$.
On reconnaît donc la somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0,1]$ pour la subdivision régulière $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, on sait donc que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \ln(1+t)dt = \left[(t+1)\ln(1+t) - (t+1)\right]_0^1 = 2\ln(2) - 1$$

Puis, puisque $v_n = \ln(u_n)$, on a
$$u_n = e^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e}$$

11.5 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(1+x) + e^x$
2. $g(x) = e^x\ln(1+x)$
3. $h(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$
4. $u(x) = \ln(1+x+x^2)$
5. $v(x) = (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$
6. $w(x) = \ln(1+\cos(x))$
7. $y(x) = \text{Arctan}(x)$
8. $z(x) = e^{\text{Arcsin}(x)}$

1.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) + e^x \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^x \ln(1+x) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{2}\right) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x}{\ln(1+x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
u(x) &= \ln(1 + x + x^2) \\
&= \ln(1 + (x + x^2)) \\
&\underset{x\to 0}{=} (x + x^2) - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{3}(x + x^2)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} (x + x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

5.
$$v(x) = (1+2x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+2x)\right)$$

On a :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}\ln(1+2x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)\left((2x) - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3\right) + \left(-2x^2 + 2x^3\right) + \left(2x^3\right) + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned}
v(x) &= \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+2x)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3\right)^3 + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(4x^2 - 16x^3\right) + \frac{1}{6}(8x^3) + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x - 2x^2 + 0x^3 + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + 2x - 2x^2 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}
w(x) &= \ln(1+\cos(x))\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{4} + o(x^3)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \left(-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{\ln(2) - \frac{x^2}{4} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

7. $y(x) = \text{Arctan}(x)$
Puisque la fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on est certain d'après le Théorème de Taylor-Young que la fonction y admet bien un Développement Limité d'ordre 3 en 0.
On a :
$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

D'où par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Arctan}(x) &\underset{x\to 0}{=} \text{Arctan}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

8. $z(x) = e^{\text{Arcsin}(x)}$
   Puisque la fonction Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on est certain d'après le Théorème de Taylor-Young que la fonction Arcsin admet bien un Développement Limité d'ordre 3 en 0.
   On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arcsin}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (1+(-x^2))^{-1/2} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + o(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

D'où par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}(x) &\underset{x\to 0}{=} \text{Arcsin}(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}z(x) &= e^{\text{Arcsin}(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2\right) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \boxed{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

11.6 Déterminer le développement limité en 0 de $\ln(1+e^{-x})$ à l'ordre 4. En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

$$\begin{aligned}
\ln(1+e^{-x}) &= \ln\left(1+\left(1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{6}(-x)^3+\frac{1}{24}(-x)^4+o(x^4)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2)+\ln\left(1+\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4+o(x^4)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2)+\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4\right)^4+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2)+\left(\frac{-x}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{48}x^4\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{16}x^4\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}x^4\right)+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} \ln(2)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+0x^3-\frac{1}{192}x^4+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} \boxed{\ln(2)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{192}x^4+o(x^4)}
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, le Théorème de Taylor-Young affirme que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4+o(x^4)$$

Par unicité de la partie régulière du $DL_4(0)$, on en déduit que :

$$\begin{cases}
f(0)=\ln(2) \\
f'(0)=\boxed{-\frac{1}{2}} \\
f''(0)=2\times\frac{1}{8}=\boxed{\frac{1}{4}} \\
f^{(3)}(0)=6\times 0=\boxed{0} \\
f^{(4)}(0)=24\times\left(-\frac{1}{192}\right)=\boxed{-\frac{1}{8}}
\end{cases}$$

11.7 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to +\infty} x\ln(x+1) - x\ln(x)$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1}$
7. $\lim_{x\to +\infty} (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$
8. $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$

1.
$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - 1 - x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

On a donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = 1$$

2.
$$x\ln(x+1) - x\ln(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{x} \times \frac{1}{x} = 1$$

On a donc
$$\lim_{x\to +\infty} x\ln(x+1) - x\ln(x) = 1$$

3.
$$\frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - 1 - \left(x + o(x^2)\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

On a donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1} = -1$$

4.
$$\frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
\exp(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - 1 - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3} = -\infty$$

5.

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1}$?
Notons $x = 1 + h$.

$$\frac{e^{(1+h)^2+1+h} - e^{2(1+h)}}{h} = \frac{e^{2+2h+h^2} - e^{2+2h}}{h} = e^{2+2h}\frac{e^{h^2} - 1}{h} \underset{h\to 0}{\sim} e^{2+2h}\frac{h^2}{h} = he^{2+2h} \underset{h\to 0}{\sim} 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1} = 0$$

7.

$$\begin{aligned} (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3} &= x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} \\ &= x\left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/3}\right] \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left[\frac{2}{3}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3} = 0$$

8.

$$\frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)} = \frac{e^{x\ln(x)} - x}{1 - x + \ln(x)}$$

Notons $x = 1 + h$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x\ln(x)} - x}{1 - x + \ln(x)} &= \frac{e^{(1+h)\ln(1+h)} - (1+h)}{-h + \ln(1+h)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\exp\left((1+h)\left(h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\right)\right) - 1 - h}{-h + h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\exp\left(h - \frac{1}{2}h^2 + h^2 + o(h^2)\right) - 1 - h}{-\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1 + \left(h + \frac{1}{2}h^2\right) - \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{2}h^2\right)^2 + o(h^2) - 1 - h}{-\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\frac{h^2}{4} + o(h^2)}{-\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{\textbf{11.8}}$ Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f admet au voisinage de 0 une fonction réciproque et que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Calculer ce développement limité.

1. Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$. f est continue par opérations et strictement croissante (par somme) sur $]-1, +\infty[$, donc réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ dans $f(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}$.
   On a bien $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$, donc f' ne s'annule pas, donc $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ également, donc d'après le Théorème de Taylor-Young, f^{-1} admet bien un DL_3 en $0 = f^{-1}(0)$
2. On raisonne par coefficients indéterminés.
   On sait que $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} f^{-1}(0) + ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$.
   De plus, pour tout x au voisinage de 0, on a : $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x))$.
   On a $f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Donc

$$f^{-1}(f(x)) \begin{cases} = x \\ \underset{x\to 0}{=} 2xa + \left(-\frac{a}{2} + 4b\right)x^2 + \left(\frac{a}{3} - 2b + 8c\right)x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

   Par unicité de la partie régulière, on a $2a = 1$, $-a/2 + 4b = 0$ et $a/3 - 2b + 8c = 0$, d'où $a = 1/2$, $b = 1/16$ et $c = -1/192$.

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$$

11.9 On pose $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[, f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
3. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

1.

$$\begin{aligned}\ln(1+x)-x &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)-x\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout x au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{4}+o(x^2)$$

autrement dit on a bien écrit un Développement Limité d'ordre 2 de f en 0.

2. Puisque f admet un $DL_2(0)$, elle admet en particulier un $DL_0(0)$ et donc est continue en 0. De plus, le DL nous donne que

$$f(0) = -\frac{1}{2}$$

Puisque f admet un $DL_2(0)$, elle admet en particulier en $DL_1(0)$ et donc est dérivable en 0. De plus, le DL nous donne que

$$f'(0) = \frac{1}{3}$$

3. L'équation de la tangente en 0 est donné par le DL d'ordre 1 en 0, autrement dit la tangente a pour équation :

$$y = \frac{-1}{2}+\frac{1}{3}x$$

De plus, puisque $f(x)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right) = -\frac{x^2}{4}+o(x^2) \underset{x\to 0}{-} \frac{x^2}{4} \leqslant 0$, on voit que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f sera située en-dessous de sa tangente en 0.