09.1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+x+1$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x}e^{1/x}\right)$

1. On a $2x^2-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, donc

$$\frac{\ln(2x^2-1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{(2x^2-1)-1}{x-1} = \frac{2x^2-2}{x-1} = 2(x+1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \boxed{4}$$

2.
$$\sqrt{x^2+2x-1}+x+1 = \frac{(x^2+2x-1)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-1}-(x+1)} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+2x-1}-(x+1)} \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$$

3.
$$\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{\sqrt{x}} = \exp\left(\sqrt{x}\ln\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)\right)$$

Examinons ce qui est dans l'exponentielle.
On a $\dfrac{3x-4}{3x-2} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{3x}{3x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$. On a donc

$$\sqrt{x}\ln\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{x}\left(\frac{3x-4}{3x-2}-1\right) = \sqrt{x}\left(\frac{-2}{3x-2}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{-2}{3\sqrt{x}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc par composition de limites, on en déduit que

$$\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{\sqrt{x}} = \exp\left(\sqrt{x}\ln\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} e^0 = \boxed{1}$$

4.
$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{x}e^{1/x}\right) = \sqrt{x}\left(1-e^{1/x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{x}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$$

09.2 Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x>0, x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1. La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur ces intervalles.
<u>En 1</u>

$$\frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x(x-1)}{x-1} = x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0 \neq 1$$

La fonction f n'est pas continue en 1. Elle ne peut donc par conséquent pas être dérivable en 1.

2. La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur ces intervalles.
   En 0
   $$\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0)$$
   La fonction g est donc continue en 0.
   $$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^2e^{-x}}{x(1-e^{-2x})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x(2x)} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
   Ainsi, g est bien dérivable en 1 et on a $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

09.3 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$.

Le problème est de trouver un $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t \iff f(t) - t = 0$.

Notons $\forall t \in [0,1],\ g(t) = f(t) - t$. La fonction g est continue sur $[0,1]$ (différence de deux fonctions continues sur $[0,1]$). De plus, $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Ainsi, $0 \in [g(1), g(0)]$, donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe $t \in [0,1]$ tel que $g(t) = 0$.

09.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}+1}$.
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant jamais).

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(2e^{-x}+1) - (e^x - e^{-x})2e^{-x}}{(2e^{-x}+1)^2} = \frac{e^x + e^{-x} + 4e^{-2x}}{(2e^{-x}+1)^2} > 0$$

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

Or

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}+1} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{-e^{-x}}{2e^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

et

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

09.5 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annulant pas), et est même continue en 0 puisque c'est un quotient de fonctions continues en 0, le dénominateur ne s'annulant pas au voisinage de 0.

On a :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{x}{1+x},\quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0,\ f(x) = \frac{x}{1-x},\quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On remarque que

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc, puisque f était déjà continue en 0 et que f' admet une limite finie en 0, le Théorème Limite de la Dérivée affirme que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0. Autrement dit, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

09.6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interprétation graphique ?

1. La fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ par somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$x\ln(x^2) - 2x = 2x\ln(x) - 2x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0)$$

car par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = 2\ln(x) + 2 - 2 = 2\ln(x)$$

3.
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2x\ln(x) - 2x}{x} = 2\ln(x) - 2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, la courbe représentative de f admettra une tangente verticale au point d'abscisse 0.

$\boxed{\textbf{09.7}}$ Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 1/3.
4. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} ?
5. La courbe représentative de f^{-1} admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ?
6. Dresser les tableaux de variation de f et f^{-1}. T
7. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f et f^{-1}.

1. La fonction f est continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme inverse d'une fonction continue et dérivable qui ne s'annule pas.
   On a $\forall x > -1,\ f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{v(x)}$, donc $u'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$. On a donc
   $$\forall x > -1,\ f'(x) = \frac{-u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-v'(x)}{2\sqrt{v(x)}u(x)^2} = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1+x^3}(1+x^3)} \leqslant 0$$
   La fonction f' étant négative et ne s'annulant qu'en 0 (nombre fini de points), la fonction f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$ et est bien sûr continue sur $]-1,+\infty[$. La fonction f réalise donc une bijection de $]-1,+\infty[$ dans $f(]-1,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-1} f(x)[=]0,+\infty[$.
   La fonction f^{-1} est donc définie sur $]0,+\infty[$.
2. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation :
   $$y = f'(2)(x-2) + f(2) =$$
   D'après la formule obtenue précédemment pour la dérivée, on a donc $f'(2) = -\frac{2}{9}$ et $f(2) = \frac{1}{3}$, donc la tangente en 2 a pour équation :
   $$y = -\frac{2}{9}x + \frac{7}{9}$$
   $$y = 1$$
3. On a $f(2) = \frac{1}{3}$ donc $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 2$.
   On sait que f^{-1} est dérivable en $f(2)$ si et seulement si $f'(2) \neq 0$, ce qui est bien le cas ici, donc f^{-1} est bien dérivable en 1/3. De plus,
   $$(f^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1/3))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{-9}{2}$$
   Ainsi, l'équation de la tangente à f^{-1} au point d'abscisse 1/3 est :
   $$y = (f^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$$
4. On sait que f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ si et seulement si $f'(x) \neq 0$. Or, f' ne s'annule qu'en 0 et $f(0) = 1$, donc f^{-1} est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
5. La courbe de f admettant une tangente horizontale au point d'abscisse 0, puisque $f(0) = 1$, la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

09.8 En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à la fonction $h : x \mapsto \ln(\text{Arctan}(x))$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)}\right)^{n^2}$$

Posons $u_n = \left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2\left(\ln(\text{Arctan}(n+1)) - \ln(\text{Arctan}(n))\right)\right) = \exp\left(n^2\left(h(n+1)-h(n)\right)\right)$.

Fixons-nous $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction h est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ (comme composée de fonctions continues et dérivables). Le Théorème des Accroissements Finis affirme que :

$$\exists c_n \in]n, n+1[\ / \ h(n+1) - h(n) = h'(c_n)(n+1-n) = h'(c_n)$$

Remarquons que puisque $c_n \in]n, n+1[$, on a $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Or, $\forall x > 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\text{Arctan}(x)}$. On a donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$n^2\left(h(n+1)-h(n)\right) = \frac{n^2}{(1+c_n^2)\text{Arctan}(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\text{Arctan}(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$

D'où par composition par exponentielle, on en déduit que :

$$u_n = \exp\left(h(n+1)-h(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

09.9

1. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation $e^x + x = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
2. Déterminer la monotonie de la suite (x_n).
3. Démontrer que $\forall n \geqslant 1,\ \ln(n - \ln(n)) \leqslant x_n \leqslant \ln(n)$
4. En déduire la limite de la suite (x_n), puis un équivalent simple de x_n.

1. Notons $f : x \mapsto e^x + x$. La fonction f est clairement continue (par somme) et strictement croissante (par somme également) sur $\mathbb{R}$. La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.
   En particulier, pour tout $n \geqslant 0$, on a $n \in \mathbb{R}$ (espace d'arrivée de f), n admet un unique antécédant par la fonction f dans $\mathbb{R}$, noté x_n.
2. On a pour tout $n \geqslant 0$ $f(x_n) = n \iff x_n = f^{-1}(n)$. Puisque f est continue et strictement croissante, on a également f^{-1} continue et strictement croissante. Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$,
   $$n < n+1 \Longrightarrow f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) \Longrightarrow x_n < x_{n+1}$$
   Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante.
3. Remarquons que puisque $f(0) = 1$, alors pour tout $n \geqslant 1$, on a $x_n \geqslant 0$.
   On a pour tout $n \geqslant 1$,
   $$x_n + e^{x_n} = n \Longrightarrow e^{x_n} = n - x_n \leqslant n \Longrightarrow x_n \leqslant \ln(n)$$
   De même
   $$x_n + e^{x_n} = n \Longrightarrow e^{x_n} = n - x_n \geqslant n - \ln(n) \Longrightarrow x_n \geqslant \ln(n - \ln(n))$$

4. En déduire la limite de la suite (x_n), puis un équivalent simple de x_n. On a $n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et comme $n \to +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(n - \ln(n)) = +\infty$, donc par comparaison on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$
De plus :
$$\frac{\ln(n - \ln(n))}{\ln(n)} \leqslant \frac{x_n}{\ln(n)} \leqslant 1$$
Autrement dit
$$1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)}{\ln(n)} \leqslant \frac{x_n}{\ln(n)} \leqslant 1$$
et donc par encadrement, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\ln(n)} = 1$$
autrement dit, on a :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

09.10 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré n ayant n racines distinctes réelles.

1. Montrer que P' admet exactement $n-1$ racines distinctes réelles.
2. Montrer que toutes les racines de $P^2 + 1$ sont complexes et toutes simples.

1. Puisque $\deg(P) = n$, on sait que $\deg(P') \leqslant n - 1$, donc P' admet au maximum $n-1$ racines distinctes.
Notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n racines de P rangées dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $t \mapsto P(t)$ est une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et vérifie $P(x_i) = 0 = P(x_{i+1})$.
Le théorème de Rolle affirme donc que P' s'annule au moins une fois sue $]x_i, x_{i+1}[$.

   On vient donc de montrer que sur chacun des intervalles $]x_1, x_2[,]x_2, x_3[, \ldots,]x_{n-1}, x_n[$, le polynôme P' s'annule au moins une fois, donc on a trouvé au moins $n-1$ racines distinctes de P (qui sont donc réelles). On ne peut pas en avoir plus, donc on a exactement toutes les racines de P'.

   Ainsi, P' admet exactement $n-1$ racines distinctes réelles.
2. Déjà si $P^2 + 1$ admet une racine, c'est nécessairement un complexe car si $P^2(x) + 1 = 0$ avec x réel, on a $(P(x))^2 = -1$ et $P(x)$ est un nombre réel : impossible.
Les racines de $P^2 + 1$ sont donc toutes des complexes non réels.

   Supposons que $P^2 + 1$ admette une racine double, autrement dit qu'il existe un z tel que $P(z)^2 + 1 = 0$ et $(P^2+1)'(z) = 0$, i.e. $2P'(z)P(z) = 0$. On a donc forcément $P(z) = 0$ ou $P'(z) = 0$. Or, dans les deux cas, les racines de P et P' sont réelles d'après 1, donc ne peuvent pas être complexes non réelles. Absurde. Les racines de $P^2 + 1$ sont donc simples.

09.11 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.
On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.
Montrer que f' s'annule sur $]a,b[$.

La fonction f est continue (car dérivable) sur le segment $[a,b]$, donc est bornée et atteint ses bornes sur le segment $[a,b]$. En particulier, elle admet un maximum en un point $c \in [a,b]$:

$$\exists c \in [a,b] \ / \ \forall t \in [a,b], \ f(t) \leqslant f(c)$$

Déjà on ne peut pas avoir $c = a$, puisque $f(a) < f(b)$.
De plus, puisque $f'(b) < 0$, b ne peut pas être un maximum (car la fonction sera strictement décroissante sur un intervalle centré sur b).
Ainsi, le maximum de f est atteint en $c \in]a,b[$, on sait donc alors que $f'(c) = 0$.

09.12 Calculer les intégrales suivantes, un changement de variable est éventuellement indiqué entre parenthèses.

1. $\displaystyle\int_0^2 t\cos(t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{3t+1}dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^{2011}(t^2+1)^{2009}dt$
7. $\displaystyle\int -\pi/5^{\pi/5} \frac{\sin(\sin(\tan(t)))}{\ln(1+t^2)}dt$
8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt \ (u = t^3+8)$
9. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{t(t+1)}dt \ (u = \frac{t}{t+1})$
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)} \ (u = t^3)$
11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt \ (u = \sqrt{t})$
12. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^t - 1}dt$
13. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t + t\ln^2(t)}$

1. $\underline{\displaystyle\int_0^2 t\cos(t)dt}$

   On pose $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \cos(t) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \sin(t) \end{array} \right.$. Les deux fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^2 t\cos(t)dt = \Big[t\sin(t)\Big]_0^2 - \int_0^2 1\sin(t)dt = 2\sin(2) - \Big[-\cos(t)\Big]_0^2 = 2\sin(2) + \cos(2) - 1$$

2. $\underline{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt}$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \Big[t - \text{Arctan}(t)\Big]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt$

On reconnaît directement une intégrale du type $u'(t)u(t)$

$$\int_1^e \frac{1}{t}\ln(t) = \frac{1}{2}\int_1^e 2\frac{1}{t}\ln(t) = \frac{1}{2}\Big[(\ln(t))^2\Big]_1^e = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$

On reconnaît directement (à une constante près) une intégrale du type $\dfrac{u'(t)}{u(t)^2} = u'(t)(u(t))^{-2}$

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt = -\int_0^1 \frac{-\sin(t)}{\cos^2(t)}dt = -\Big[-\frac{1}{\cos(t)}\Big]_0^1 = \frac{1}{\cos(1)} - 1$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{3t+1}dt$

$$\int_{-1}^0 e^{3t+1}dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^0 3e^{3t+1}dt = \frac{1}{3}\Big[e^{3t+1}\Big]_{-1}^0 = \frac{1}{3}\left(e^1 - e^{-2}\right)$$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^{2011}(t^2+1)^{2009}dt$

La fonction $f : t \mapsto t^{2011}(t^2+1)^{2009}$ est impaire sur $[-1,1]$ car $\forall t \in [-1,1],\ f(-t) = f(t)$. On en déduit directement que $\displaystyle\int_{-1}^1 t^{2011}(t^2+1)^{2009}dt = 0$.

7. $\displaystyle\int -\pi/5^{\pi/5} \frac{\sin(\sin(\tan(t)))}{\ln(1+t^2)}dt$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(\sin(\tan(t)))}{\ln(1+t^2)}$ est impaire sur $\left[-\dfrac{\pi}{5}, \dfrac{\pi}{5}\right]$ car $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right], f(-t) = f(t)$. On en déduit directement que $\displaystyle\int -\pi/5^{\pi/5} \frac{\sin(\sin(\tan(t)))}{\ln(1+t^2)}dt = 0$.

8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt \ (u = t^3+8)$

1ère méthode.

Posons $\forall t \in [0,2], u = t^3 + 8 = \varphi(t)$.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$
- $\forall t \in [0,2],\ \varphi'(t) = 3t^2$, donc $du = 3t^2dt$
- $t = 0 \Longleftrightarrow u = 8$
- $t = 2 \Longleftrightarrow u = 16$

Alors :

$$\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{t^3+8}\ (3t^2dt) = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)dt = \frac{1}{3}\int_8 16\frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\Big[\ln(u)\Big]_8 16 = \frac{\ln(2)}{3}$$

2ème méthode.

On veut poser $u = t^3 + 8 \Longleftrightarrow t^3 = u - 8 \Longleftrightarrow t = (u-8)^{1/3} = \varphi(u)$.

- $t = 0 \Longleftrightarrow u = 8$
- $t = 2 \Longleftrightarrow u = 16$
- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[8, 16]$
- $\forall u \in [8, 16],\ \varphi'(u) = \frac{1}{3}(u-8)^{-2/3}$, donc $dt = \frac{1}{3}(u-8)^{-2/3}du$

Alors :

$$\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt = \int_8 16 \frac{\left((u-8)^{1/3}\right)^2}{u}\frac{1}{3}(u-8)^{-2/3}du = \frac{1}{3}\int_8 16\frac{1}{u}du = \Big[\ln(u)\Big]_8 16 = \frac{\ln(2)}{3}$$

9. $\underline{\int_{1/2}^1 \frac{1}{t(t+1)}dt\ (u = \frac{t}{t+1})}$

1ère méthode.

Posons $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], u = \frac{t}{t+1} = \varphi(t)$.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \varphi'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$, donc $du = \frac{1}{(t+1)^2}dt$
- $t = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow u = \frac{1}{3}$
- $t = 1 \Longleftrightarrow u = \frac{1}{2}$

Alors :

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{t(t+1)}dt = \int_{1/2}^1 \frac{t+1}{t}\left(\frac{1}{(t+1)^2}dt\right) = \int 1/2^1 \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)dt = \int_{1/3} 1/2\frac{1}{u}du = \Big[\ln(u)\Big]_{1/3} 1/2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

2ème méthode.

On veut poser $u = \frac{t}{t+1} \Longleftrightarrow (t+1)u = t \Longleftrightarrow t(u-1) = -u \Longleftrightarrow t = \frac{u}{1-u} = \varphi(u)$. (on a pu diviser par $1-u$ car u ne peut jamais être égal à 1, puisque $u = \frac{t}{t+1}$)

- $t = 1/2 \Longleftrightarrow u = 1/3$
- $t = 1 \Longleftrightarrow u = 1/2$
- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$
- $\forall u \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right],\ \varphi'(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$, donc $dt = \frac{1}{(1-u)^2}du$

Alors :

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{t(t+1)}dt = \int_{1/3} 1 \frac{1}{\frac{u}{1-u}\left(\frac{u}{1-u}+1\right)}\frac{1}{(1-u)^2}du = \int_{1/3} 1/2\frac{1}{u}du = \Big[\ln(u)\Big]_{1/3} 1/2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

10. $\underline{\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)}\ (u = t^3)}$

Posons $\forall t \in [1, 2], u = t^3 = \varphi(t)$.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$
- $\forall t \in [1, 2],\ \varphi'(t) = 3t^2$, donc $du = 3t^2dt$
- $t = 1 \Longleftrightarrow u = 1$
- $t = 2 \Longleftrightarrow u = 8$

Alors :
$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3t^2dt}{t^3(t^3+1)} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{\varphi(t)\left(\varphi(t)+1\right)}\varphi'(t)dt = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{u(u+1)}du$$
Cherchons deux réels a et b tels que $\forall u \in [1,8], \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$, la résolution nous donne directement que $a = 1$ et $b = -1$. On en déduit que
$$\frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{u(u+1)}du = \frac{1}{3}\int_1^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{3}\Big[\ln(u) - \ln(u+1)\Big]_1^8 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

11. $\underline{\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt \ (u=\sqrt{t})}$

Posons $\forall t \in [1,2], u = \sqrt{t} = \varphi(t)$.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$
- $\forall t \in [1,2],\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, donc $du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$
- $t = 1 \Longleftrightarrow u = 1$
- $t = 2 \Longleftrightarrow u = \sqrt{2}$

Alors :
$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt = \int_1^2 4\ln(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = 4\int_1^2 \ln(\varphi(t))\varphi'(t)dt = 4\int_1 \sqrt{2}\ln(u)du = 4\Big[u\ln(u) - u\Big]_1^{\sqrt{2}} == 4\left(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}) - \sqrt{}\right.$$

12. $\underline{\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^t-1}dt}$

Posons $\forall t \in [0,\ln(2)]$, $u = \sqrt{e^t-1} \Longleftrightarrow e^t - 1 = u^2 \Longleftrightarrow t = \ln(u^2+1) = \varphi(u)$.
- $t = 0 \Longleftrightarrow u = 0$
- $t = \ln(2) \Longleftrightarrow u = 1$
- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$
- $\forall u \in [0,1],\ \varphi'(u) = \dfrac{2u}{u^2+1}$, donc $dt = \dfrac{2u}{u^2+1}du$

Alors :
$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^t-1}dt = \int_0^1 u\left(\frac{2u}{u^2+1}du\right) = 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}du = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du = 2\Big[u - \text{Arctan}(u)\Big]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

13. $\underline{\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t+t\ln^2(t)}}$

Posons $\forall t \in [1,e]$, $u = \ln(t) \Longleftrightarrow t = e^u = \varphi(u)$.
- $t = 1 \Longleftrightarrow u = 0$
- $t = e \Longleftrightarrow u = 1$
- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$
- $\forall u \in [0,1],\ \varphi'(u) = e^u$, donc $dt = e^u du$

Alors :
$$\int_1^e \frac{dt}{t+t\ln^2(t)} = \int_0^1 \frac{e^u du}{e^u + e^u u^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \Big[\text{Arctan}(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

09.13 On pose pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$. En déduire une formule explicite pour $I_{p,q}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

1. On a
$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$$
Posons $\left| \begin{array}{l} u'(t) = t^p \\ v(t) = (1-t)^q \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u(t) = \frac{t^{p+1}}{p+1} \\ v'(t) = -q(1-t)^{q-1} \end{array} \right.$, ce qui nous donne
$$I_{p,q} = \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\Big]_0^1 + \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$
Par une récurrence immédiate, on en déduit alors que
$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\dots 2 \times 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} I_{p+q,0}$$
Or, $I_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}dt = \left[\frac{1}{p+q+1} t^{p+q}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$, donc
$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

2.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{p+k}dt \\ &= \int_0^1 t^p \left(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-t)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 t^p (1-t)^q dt \\ &= I_{p,q} \\ &= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}\end{aligned}$$

09.14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose $\forall x > 0, g(x) = f(x) - \ln(x)$. Etudier les variations de g et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1. La fonction f est par définition la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1. On sait donc que f est dérivable et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \frac{e^x}{x} > 0$$
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2. On pose $\forall x > 0, g(x) = f(x) - \ln(x)$. Comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
$$\forall x > 0,\ g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} > 0$$
On en déduit alors le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Puisque $f(1) = 0$, on en déduit que $g(1) = 0$, et donc d'après le tableau de variations, on a $\forall x \geqslant 1, g(x) \geqslant 0$, et $\forall x \leqslant 1, g(x) \leqslant 0$, autrement dit
$$\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant \ln(x), \qquad \forall x \leqslant 1,\ f(x) \leqslant \ln(x)$$

3. En passant à la limite dans les inégalités précédentes, on en déduit directement que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

09.15 Soit G la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-(xt)^2} dt$.

Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ et soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

1. Etudier les variations de F. On admet que F est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer pour $x \neq 0$ une relation entre $G(x)$ et $F(x)$.
3. Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}.$$
En déduire les variations de G.
4. Montrer que G est continue en 0 et que $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$.
5. Montrer que pour $u > 0$, on a $|e^{-u} - 1| \leqslant u$.
En déduire que G est dérivable en 0 et que $G'(0) = 0$.
6. Vérifier que G' est continue sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction F est une fonction dérivable puisque c'est une primitive de la fonction f et $F' = f$. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a pour $x \neq 0$,
$$G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt$$
Posons un changement de variable (bijectif) $u = xt$:
$$\begin{cases} u = xt \Leftrightarrow t = \frac{u}{x} (\text{possible si } x \neq 0) \\ du = xdt \Leftrightarrow dt = \frac{1}{x} du \\ t = 0 \Leftrightarrow u = 0, \quad t = 1 \Leftrightarrow u = x \end{cases}$$
Le changement de variable est bien licite puisque $u \mapsto \frac{1}{x}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. On a donc
$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-u^2} du = \frac{F(x)}{x}$$
3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction F est une primitive de f, donc en particulier dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = -\frac{1}{x^2} F(x) + \frac{1}{x} F'(x) = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}$$
Pour $x \neq 0$, on a
$$\begin{aligned} t \in [0, x] \text{ (ou } [x, 0]) &\Longrightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant x^2 \\ &\Longrightarrow -x^2 \leqslant -t^2 \leqslant 0 \\ &\Longrightarrow e^{-x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant 1 \end{aligned}$$
Donc pour $x > 0$, par positivité de l'intégrale sur $[0, x]$, on a $\int_0^x e^{-x^2} dt \leqslant \int_0^x e^{-t^2} dt$, autrement dit $xe^{-x^2} \leqslant F(x)$. Ainsi, G est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De meme pour $x < 0$, on a pour l'intégrale entre $[x, 0]$ (dans le mauvais sens) $\int_0^x e^{-x^2} dt \geqslant \int_0^x e^{-t^2} dt$, autrement dit $xe^{-x^2} \geqslant F(x)$. Ainsi, G est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

4. On a pour $x \neq 0$, $G(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$. Comme F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0) = 1$, on a que

$$G(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

De plus, comme F est bornée (par exemple si on note $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x > 0,\ |F(x)| \leqslant M$), on a pour $x > 0$,

$$|G(x)| = \frac{|F(x)|}{x} \leqslant \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

5. On sait que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geqslant 1 + t$, donc en particulier, pour tout $u > 0$, on a

$$e^{-u} \geqslant 1 - u \Longrightarrow e^{-u} - 1 \geqslant -u$$

Puisque $e^{-u} - 1$ et $-u$ sont négatifs pour tout $u > 0$, et que $t \mapsto |t|$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit donc que

$$|e^{-u} - 1| \leqslant |-u| = u$$

D'où l'inégalité cherchée.

On a

$$\begin{aligned} \left|\frac{G(x) - G(0)}{x}\right| &= \frac{1}{|x|}\left|\int_0^1 e^{-t^2x^2}dt - \int_0^1 1dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x|}\int_0^1 |e^{-t^2x^2} - 1|dt \\ &\leqslant \frac{1}{|x|}x^2\int_0^1 t^2dt \\ &\leqslant \frac{1}{3}|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc G est bien dérivable en 0 et $G'(0)$ vaut 0.

6. Commençons par remarquer que G' est continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur qui ne s'annule pas).
Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2} \\ &= \frac{e^{-x^2} - \dfrac{F(x)}{x}}{x} \\ &= \frac{f(x) - G(x)}{x} \\ &= \frac{f(x) - 1 + 1 - G(x)}{x} \\ &= \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{G(x) - 1}{x} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0) - G'(0) = 0 - 0 = 0 = G'(0) \end{aligned}$$

Donc G' est bien continue en 0 et ainsi G' est continue sur $\mathbb{R}$.