08.1 On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et $\mathbb{E}[Y]$.

1. • $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   • $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   • Soient $k \in X(\Omega)$ et $\ell \in Y(\Omega)$. Calculons $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell])$.
   <u>Si $\ell > k$</u>, alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = 0$ car il est impossible de tirer une boule numérotée ℓ dans l'urne k lorsque $\ell > k$.
   <u>Si $\ell \leqslant k$</u>, alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{nk}$
   On a donc finalement :
$$\forall k, \ell \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \begin{cases} \dfrac{1}{nk} & \text{si } \ell \leqslant k \\ 0 & \text{si } \ell > k \end{cases}$$

2.
$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. Rappelons déjà que $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   Pour déterminer la loi marginale de Y, on utilise la formule des Probabilités Totales avec le système complet d'événéments $([X = k])_{1 \leqslant k \leqslant n}$. On a donc :
$$\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \sum_{k=\ell}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k}$$
   Puisque $Y(\Omega)$ est un ensemble fini, la variable Y admet bien une espérance et on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = \sum_{\ell=1}^{n} \ell\mathbb{P}(Y = \ell) &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{j}{kn} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{kn} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (k+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) = \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

08.2 Le nombre de visiteurs quotidiens à Disneyland Paris© suit une loi de Poisson de paramètre 10 000. Chaque visiteur entre dans le parc par une des dix entrées $E_1, \ldots, E_{10}$, qu'il choisit de manière équiprobable et indépendamment des autres visiteurs.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
2. On désigne par N le nombre de visiteurs en une journée et X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 durant cette journée.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle à $[N = n]$ de X_1.
   (b) En déduire la loi conjointe de N et X_1, puis la loi de X_1.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de X_1.
3. Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par E_1 par jour.

1. Fixons-nous une journée quelconque et notons N la variable égale au nombre de visiteurs entrant dans la journée.
   On sait dans l'énoncé que N suit une loi de Poisson de paramètre 10 000. On sait donc directement que :
   $$N(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N = n) = e^{-10\,000}\frac{(10\,000)^n}{n!}, \qquad \mathbb{E}[N] = \mathbb{V}[N] = 10\,000$$
   Le nombre moyen de visiteurs correspond donc à $\mathbb{E}[N]$, soit il y a 10 000 visiteurs en moyenne en une journée.
2. (a) On cherche la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[N = n]$.

   - Calculons déjà $X_1(\Omega)$.
     Le nombre de visiteurs entrant dans le parc étant un nombre de $\mathbb{N}$, a priori, ils peuvent tous entrer par E_1, tout comme aucun ne peut choisir l'entrée E_1, donc on a
     $$X_1(\Omega) = \mathbb{N}$$
   - Fixons-nous à présent $n \in \mathbb{N}$.
     Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons $\mathbb{P}(X_1 = k \mid N = n)$.
     <u>Si $k > n$</u>, on a $\mathbb{P}(X_1 = k \mid N = n) = 0$, puisqu'il ne peut pas y avoir plus de visiteurs entrant par E_1 que de visiteurs au total entrant dans le parc.
     <u>Si $0 \leqslant k \leqslant n$</u>, alors on reconnaît un schéma binomial.

     – Chaque visiteur a deux choix : passer par l'entrée E_1 (succès de probabilité 1/10) ou ne pas passer par l'entrée E_1 (échec de probabilité 9/10).
     – Cette expérience est répétée exactement n fois (autant que de visiteurs) et de manière indépendante selon l'énoncé.
     – La variable X_1 compte le nombre de succès lors de ces n expériences
     On a donc bien X_1 qui suit une loi binomiale $\mathbb{B}(n, 1/10)$.
     $$X_1|_{[N=n]} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{10}\right)$$
     et donc :
     $$\mathbb{P}(X_1 = k \mid N = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$
     En effet, on

(b) Loi conjointe de N et X_1.

On a $N(\Omega) = X_1(\Omega) = \mathbb{N}$. Soient $n, k \in \mathbb{N}$.
1er cas : $k > n$. Alors :

$$\mathbb{P}([N = n] \cap [X_1 = k]) = 0$$

(puisqu'il n'est pas possible qu'il y ait k visiteurs entrant par E_1 s'il y a n visiteurs ($n < k$) au total dans le parc).
2ème cas : $k \leqslant n$. Alors :

$$\mathbb{P}([N = n] \cap [X_1 = k]) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{[N=n]}(X_1 = k) = e^{-10\,000} \frac{(10\,000)^n}{n!} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$$

Loi marginale de X_1.

On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la Formule des Probabilités Totales pour le système complet d'événements $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X_1 = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X_1 = k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-10\,000} \frac{(10\,000)^n}{n!} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-10\,000}}{k!} \left(\frac{1}{10}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(10\,000)^n}{(n-k)!} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-10\,000}}{k!} \left(\frac{1}{10}\right)^k (10\,000)^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(9\,000)^\ell}{(\ell)!} \\
&= e^{-10\,000} \frac{1000^k}{k!} e^{9000} = e^{-1000} \frac{1000^k}{k!}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors que X_1 suit une loi de Poisson de paramètre 1000.

(c) On en déduit que $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{V}[X_1] = 1000$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{si } N \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{|_{[N=n]}} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p), \text{ alors } X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)}$$

3. On applique le même raisonnement que précédemment.

- On sait que le nombre de visiteurs qui entrent par E_1 par jour suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1000$.
- Supposons qu'il y ait n visiteurs entrant par l'entrée E_1 et notons Y le nombre de visiteurs qui payent parmi ces visiteurs.
  Chaque visiteur entrant par E_1 a deux possibilités : payer (succès, de probabilité $9/10$) ou ne pas payer (échec, de probabilité $1/10$) et on répète cette épreuve n fois de manière indépendante, Y comptant le nombre de succès, suit alors une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(n, 9/10)$.

On en conclut donc que la variable Y suit une loi de Poisson de paramètre $1000 \times \dfrac{9}{10} = 900$.
En particulier, le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par E_1 par jour sera égal à $\mathbb{E}[Y] = 900$.

08.3

1. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda')$ avec X, Y indépendantes. Montrer que $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda+\lambda')$.
2. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p)$ avec X, Y indépendantes. Montrer que $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.

1. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda')$ avec X, Y indépendantes, et notons $Z = X+Y$. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on en déduit par somme que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \text{ (car } X, Y \text{ indépendantes)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^i}{i!}e^{-\lambda'}\frac{(\lambda')^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda-\lambda'}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}(\lambda)^i(\lambda')^{k-i} \\
&= \frac{e^{-\lambda-\lambda'}}{k!}(\lambda+\lambda')^k \text{ (Binôme)}
\end{aligned}$$

   On reconnaît donc bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$.
2. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p)$ avec X, Y indépendantes, et notons $Z = X+Y$. Puisque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,m]\!]$, on en déduit par somme que $Z(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$.

   Soit $k \in [\![0,n+m]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \text{ (car } X, Y \text{ indépendantes)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{m}{k-i} \\
&= p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \\
&= p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k} \text{ (d'après Vandermonde)}
\end{aligned}$$

   On reconnaît donc bien une loi Binomiale de paramètres $(n+m,p)$.

08.4 Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes.

On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer les fonctions de répartition de U et de V en fonction de celles de X et de Y.

Soit $U = \max(X, Y)$ et notons F_U sa fonction de répartition.
On a donc

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ F_U(t) &= \mathbb{P}(U \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\max(X, Y) \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant t)\mathbb{P}(Y \leqslant t) \quad \text{(car } X, Y \text{ indépendantes)} \\ &= \boxed{F_X(t)F_Y(t)}\end{aligned}$$

Soit $V = \min(X, Y)$ et notons F_V sa fonction de répartition.
On a donc

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ F_V(t) &= \mathbb{P}(V \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\min(X, Y =\leqslant t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min(X, Y) > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) \quad \text{(car } X, Y \text{ indépendantes)} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leqslant t))\,(1 - \mathbb{P}(Y \leqslant t)) \\ &= 1 - (1 - F_X(t))\,(1 - F_Y(t)) \\ &= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t)F_Y(t)\end{aligned}$$

08.5 Soit X une VAR discrète dont la loi est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. On note $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

1. Puisque $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, on en déduit directement que $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.
   On en déduit la loi de Y et la loi conjointe de X et Y : :

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$X \setminus Y$	0	1	4
-2	0	0	$\frac{1}{6}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0
2	0	0	$\frac{1}{6}$

2. Par exemple, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = 0$, mais $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$, donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

3. On a facilement : $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[Y] = \frac{11}{6}$.
   Pour le calcul de la covariance, on a besoin de la loi de $Z = XY$.

k	-8	-1	0	1	8
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

   On calcule alors facilement que $\mathbb{E}[XY] = 0$. On en déduit que

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

   Ainsi les variables X et Y ne sont pas indépendantes mais pourtant leur covariance est nulle. Elles sont seulement non-corrélées.

08.6 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes mutuellement. On note pour tout $i \geqslant 0$, $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$ et étudions $Y_i = X_i X_{i+1}$.
Puisque $X_i(\Omega) = X_{i+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, on a également $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$. La variable Y_i est donc également une variable aléatoire de Bernoulli.
De plus,
$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1]) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_{i+1} = 1) = p \times p = p^2$$
car les variables X_i et X_{i+1} sont indépendantes.
On en déduit alors que
$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 1) = 1 - p^2$$
On a donc montré que :
$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ Y_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p^2)}$$
Rappelons donc qu'on a $\mathbb{E}[Y_i] = p^2$ et $\mathbb{V}[Y_i] = p^2(1 - p^2)$.

2. Soit $n \geqslant 1$ et notons $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Par linéarité de l'espérance, on a : $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} p^2 = np^2$.
A priori, les variables Y_i sont loin d'être indépendantes (par exemple le X_i apparaît simultanément dans le calcul de Y_i et Y_{i-1}). On sait en tout cas (cas général) que :
$$\mathbb{V}[S_n] = \mathbb{V}\left[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[Y_i] + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$$
Fixons-nous (i, j) tel que $1 \leqslant i < j < n$ et calculons $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.
$Y_i Y_j = X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}$ est encore une variable de Bernoulli (produit de 0 ou de 1). On a donc
$$\mathbb{E}[Y_i Y_j] = \mathbb{P}(Y_i Y_j = 1) = \mathbb{P}\left([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_j = 1] \cap [X_{j+1} = 1]\right)$$
<u>Si $j \neq i + 1$</u>, alors les quatres variables $X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1}$ sont distinctes et indépendantes, donc
$$\mathbb{E}[Y_i Y_j] = p^4$$
<u>Si $j = i + 1$</u>, alors il n'y a que trois variables X_i, X_j, X_{j+1} (indépendantes) :
$$\mathbb{E}[Y_i Y_j] = p^3$$
Donc en conclusion :
– si $j \neq i + 1$, alors $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = p^4 - p^2 p^2 = 0$
– si $j = i + 1$, alors $\mathrm{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$.
On en déduit donc que
$$\mathbb{V}[S_n] = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p) = p^2(1 - p)(n + 3np - 2p)$$

08.7 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité pour que la matrice A soit diagonalisable.

Avant d'introduire les probabilités, rappelons lorsque la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

pour $x, y \in \mathbb{R}$ est diagonalisable ou non.
Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc x et y.

- Si on a $x \neq y$, alors A a deux valeurs propres distinctes et est de taille 2, donc elle est diagonalisable.
- Si $x = y$, x est l'unique valeur propre de A. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à xI_2 : il existerait une matrice inversible P telle que

$$A = P(xI_2)P^{-1} = xPP^{-1} = xI_2$$

Or, on a bien évidemment $A \neq xI_2$, donc si $x = y$, A n'est pas diagonalisable.

En conclusion :

$$A \text{ diagonalisable} \iff x \neq y$$

Notons B l'événement "la matrice A est diagonalisable". D'après l'étude précédente, on a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y),$$

puisque $[X \neq Y] = \overline{[X = Y]}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \quad \text{(car } X, Y \text{ indépendantes)} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \Big((1-p)^{k-1}p\Big)^2 \\
&= 1 - p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^{k-1} \\
&= 1 - p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^{n} \\
&= 1 - p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} \\
&= 1 - \frac{p^2}{2p - p^2} \\
&= 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2-2p}{2-p}
\end{aligned}$$

08.8 Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Y] = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

1. On a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit donc que $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.
   Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leqslant k) &= \mathbb{P}\left(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant k\right)\\ &= \mathbb{P}\left([X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant k]\right)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant k)\mathbb{P}(X_2 \leqslant k) \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant k)\end{aligned}$$

   par indépendance des variables X_i. Comme les variables X_i suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

   On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

   On a donc $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y \leqslant 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ et pour tout $k \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leqslant k) - \mathbb{P}(Y \leqslant k-1) = \boxed{\left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n}$$

   (Remarquons que la formule est aussi valable pour $k = 1$).

2. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{n} k \left[\left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n\right]\\ &= \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{n+1} - k(k-1)^n\right)\\ &= \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{n+1} - (k-1+1)(k-1)^n\right)\\ &= \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{n+1} - (k-1)^{n+1}\right) - \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^n\\ &= \frac{1}{n^n}\left(n^{n+1} - 0^{n+1}\right) - \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{n-1} k^n\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^n}{n^n}\end{aligned}$$

08.9 Soient X et Y des variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{\alpha}{2^{i+1}j!}$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes.
3. Dterminer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

1. Il faut choisir α pour que $\sum_{i,j} \mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = 1$. Or :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N})^2} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{i+1}}j! \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{2j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{2j!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \alpha\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} \\ &= \alpha e\end{aligned}$$

On doit donc imposer que $\alpha e = 1$, autrement dit : $\alpha = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$.

2. Déterminons les lois marginales du couple (X,Y).
Soit $i \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{2^{i+1}j!} = \frac{1}{2^{i+1}}e^{-1}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

Soit $j \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{2^{i+1}j!} = \frac{e^{-1}}{2j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{e^{-1}}{j!}$$

On a donc bien pour tous $i,j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$$

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

3. Puisque les variables X et Y sont indépendantes, leur covariance est bien entendu nulle.

$\boxed{\textbf{08.10}}$ On joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$ de la façon suivante :

– On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. On note N la VAR égale au nombre de lancers nécessaires.
– Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois Pile, alors on relance n fois la pièce. On appelle alors X le nombre de Pile obtenu au cours de ces n lancers.

On admettra que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

1. Déterminer la loi de N.
2. Pour $n \geqslant 1$, déterminer la loi conditionnelle à $[N=n]$ de X.
3. En déduire la loi de X.
4. On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire BG.
   (b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.
   (c) En déduire $\mathbb{E}[X]$.

1. On considère ici une expérience : lancer la pièce. Cette expérience comporte un succès "Obtenir Pile" (de probabilité p) et un échec "Obtenir Face" (de probabilité $1-p$). On repète cette expérience une infinité de fois de manière indépendante et N désigne le rang d'apparition du premier succès. On sait donc que N suit une loi Géométrique de paramètre p :

$$\mathbb{N}(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N=n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. POn a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on cherche à calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k\,|N=n)$.

   Lorsqu'on sait que $[N=n]$ est réalisé, on répète n fois de manière indépendante la même expérience (lancer la pièce), qui comporte à chaque fois un succès "Obtenir Pile" (de probabilité p) et un échec "Obtenir Face" (de probabilité $1-p$) et X compte alors le nombre de succès lors de ces n lancers. On sait donc que la loi conditionnelle de X à $[N=n]$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. D'après la Formule des Probabilités Totales appliquée au système complet d'événements $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$,

on a pour tout entier $k > 0$: (en notant $q = 1 - p$ pour simplifier un peu les calculs) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = k]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= p^{k+1} q^{-k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (q^2)^n \\
&= \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \times \frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} \\
&= \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}} \\
&= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1} q^n = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} (q^2)^n = \frac{pq^2}{q(1-q^2)} = \frac{q}{1+q}$$

4. (a) On a $BG(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(BG = 0) = \mathbb{P}(B = 0) = 1 - p'$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(BG = k) &= \mathbb{P}([B = 1] \cap [G = k]) \\
&= \mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(G = k) \quad \text{par indépendance de } B \text{ et } G \\
&= p'(1-p')^{k-1} p' \\
&= (p')^2 (1-p')^{k-1}
\end{aligned}$$

(b) On choisit

$$p' = 1 - \frac{q}{q+1} = \frac{1}{1+q}$$

On a bien alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(BG = 0)$ et de plus,

$$p'^2 (1-p')^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2} \times \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k-1}} = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$

donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(BG = k)$.

(c) On a donc $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[BG]$. Or, B et G sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}[BG] = \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[G] = p' \times \frac{1}{p'} = 1$$

et donc $\mathbb{E}[X] = 1$.

08.11 Un sac contient n jetons numérotées de 1 à n.

On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac. Soient X le premier numéro tiré, et Y le deuxième numéro tiré.

1. Déterminer la covariance $\operatorname{cov}(X, Y)$ de X et de Y.
2. On pose $Z = |Y - X|$. Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance.

1. $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   X suit de manière évidente la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, donc
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$$
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, en utilisant le SCE $([X = j])_{1 \leqslant j \leqslant n}$,
   $$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}_{[X=j]}(Y = k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} = (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$
   Ainsi, Y suit également une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, donc
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[Y] = \frac{n+1}{2}$$
   Les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque par exemple $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$. mais $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \neq 0$.
   Calculons $\mathbb{E}[XY]$. On applique pour cela le Théorème de Transfert :
   $$\mathbb{E}[XY] = \sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} ij\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i \neq j} ij\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i,j} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$
   $$= \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} - \sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$
   On calcule enfin :
   $$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{-(n+1)}{12}$$
2. On a $Z(\Omega) = [\![1, n-1$ car il n'est pas possible que $X = Y$ (puisqu'on tire sans remise) et au maximum l'écart entre X et Y sera $n - 1$ (si par exemple on tire successivement les jetons 1 et n).
   Séparons l'événement $[Z = k]$ en deux événements $[Z = k] \cap [X > Y]$ et $[Z = K] \cap [X < Y]$. On obtient alors :
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i - k]) + \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i + k]) \\
   &= \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{n(n-1)} \\
   &= \frac{1}{n(n-1)}(n - (k+1) + 1) + \frac{1}{n(n-1)}((n-k) - 1 + 1) \\
   &= \boxed{\frac{2(n-k)}{n(n-1)}}
   \end{aligned}$$

08.12 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoire $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définies par $X_1 = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ième tirage, et $X_i = 0$ sinon.

On définit alors pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et $\mathbb{E}[X_1]$.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis $\mathbb{E}[X_2]$.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Déterminer $Z_p(\Omega)$.
   (b) Déterminer pour $k \in Z_p(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \,|\, Z_p = k)$
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
   $$\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}$$
   (d) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. La variable Z_p désigne le nombre de boules blanches tirées au cours des p premiers tirages.
2. X_1 vaut 1 lorsque la boule tirée est blanche et 0 sinon. Donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On a donc $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$.
3. Voici la loi du couple (X_1, X_2) :

$X \ \backslash \ Y$	0	1
0	$\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c+2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+2}\right)$
1	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c+2}\right)$

Par exemple, pour calculer $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$, on utilise la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0)$$

Puis, sachant que l'on a obtenu une boule noire au premier tirage ($[X_1 = 0]$), il y a avant le deuxième tirage $c + 2$ boules dans l'urne dont $c + 1$ qui sont noires, donc $\mathbb{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$.
De même pour les autres probabilités.

Pour obtenir la loi marginale de X_2, il suffit d'appliquer la Formule des Probabilités Totales avec le SCE $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= \frac{c+1}{2(c+2)} + \frac{1}{2(c+2)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et donc $\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2}$.

4. La loi de Z_2 est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Z_2 = k)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c+2}\right)$	$\frac{1}{c+2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c+2}\right)$

5. (a) On a clairement $Z_p(\Omega) = [\![0, p]\!]$.

   (b) L'événement $[Z_p = k]$ signifie qu'au cours des p premiers tirages, on a tiré k boules blanches et donc $p-k$ boules noires. On a donc mis dans l'urne kc boules blanches et $(p-k)c$ boules noires supplémentaires. Il y a donc avant le tirage $p+1$, $pc+2$ boules dans l'urne dont $kc+1$ blanches :

$$\mathbb{P}_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc+1}{pc+2}$$

   (c) A l'aide de la Formule des Probabilités Totales avec le système complet d'événements $([Z_p = 0], \dots, [Z_p = p])$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}([Z_p = k] \cap [X_{p+1} = 1]) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\mathbb{P}_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\frac{kc+1}{pc+2} \\ &= \frac{1}{pc+2}\left(c\sum_{k=0}^{p} k\mathbb{P}(Z_p = k) + \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_p = k)\right) \\ &= \frac{c\mathbb{E}[Z_p] + 1}{pc+2}\end{aligned}$$

   (d) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(p)$: "$X_1, X_2, \dots, X_p$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$" est vraie pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.
   - Pour $p = 1$, la propriété est vraie d'après 2).
   - Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Alors

$$\mathbb{E}[Z_p] = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$$

     On obtient donc que

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{\frac{pc}{2} + 1}{pc+2} = \frac{1}{2}$$

     et donc X_{p+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. La propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est donc encore vraie.
   - Par récurrence, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.