07.1 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.
Soit X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X.

Notons pour tout $i \geqslant 1$ les événements :
– B_i : "la i-ème boule tirée est blanche"
– R_i : "la i-ème boule tirée est rouge"

- $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$.
- $(X = 2) = B_1 \cap B_2$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \quad \text{(probas composées)}\\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{15}}\end{aligned}$$

En effet, pour $\mathbb{P}(B_1)$, on a 6 boules dont 2 blanches, et on a équiprobabilité donc : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{6}$.
Pour $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$, on a 5 boules dans l'urne dont 1 blanche, et on a équiprobabilité donc : $\mathbb{P}B_1(B_2) = \frac{1}{5}$.

- $(X = 3) = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}((B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3))\\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap B_3) \quad \text{(par incompatibilité)}\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2)\mathbb{P}_{B_1\cap R_2}(B_3) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2)\mathbb{P}_{R_1\cap B_2}(B_3) \quad \text{(probas composées)}\\ &= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\\ &= \boxed{\frac{2}{15}}\end{aligned}$$

- $(X = 4) = (B_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) \cup (R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$. Donc de même que précédemment, en utilisant l'incompatibilité puis la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=4) &= \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap B_4) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)\\ &= \frac{2}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\\ &= \boxed{\frac{4}{15}}\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=5) &= 1 - \mathbb{P}(X=2) - \mathbb{P}(X=3) - \mathbb{P}(X=4)\\ &= 1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{15} - \frac{4}{15} = \boxed{\frac{8}{15}}\end{aligned}$$

La loi de X est donc la suivante :

k	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

07.2 Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne.
On appelle X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}[X]$.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

1. Notons pour tout $i \geqslant 1$, B_i : "La i-ième boule tirée est blanche" et R_i : "La i-ième boule tirée est rouge".
   - Au pire, on tire les $n-2$ boules rouges en premier et ensuite, on choisit nécessairement une des deux boules rouges, donc les valeurs de X peuvent aller jusqu'à $n-1$. On a donc
   $$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]}$$
   - $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{2}{n}$ car on a n boules dont 2 blanches et on choisit de manière équiprobable.
   - Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Calculons $\mathbb{P}(X=k)$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k)\\ &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\cdots\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(R_3)\cap\cdots\cap\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1})\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(B_k)\\ &\qquad \text{(d'après la formule des probabilités composées)}\end{aligned}$$

   On a $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{n-2}{n}$ puisque $n-2$ boules parmi les n sont rouges.
   On a $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \dfrac{n-3}{n-1}$ puisqu'il reste $n-1$ boules dont $n-3$ qui sont rouges.
   Plus généralement, pour tout $i \in [\![1, k-2]\!]$, $\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_i}(R_{i+1}) = \dfrac{n-2-i}{n-i}$, puisque si on a déjà tiré i boules rouges, il reste $n-2-i$ boules rouges et toujours les 2 boules blanches.
   De même, $\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(B_k) = \dfrac{2}{n-(k-1)}$.

   Par conséquent,

   $$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{n-k}{n-k+2}\frac{2}{n-k+1} = \boxed{\frac{2(n-k)}{n(n-1)}}$$

   La variable X admet bien entendu une espérance puisque $X(\Omega)$ est fini.

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2) = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(n\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = n - \frac{2n-1}{3} = \boxed{\frac{n+1}{3}}\end{aligned}$$

2. Lorsque X prend la valeur k, cela veut dire qu'on a déjà tiré $k-1$ boules rouges dans l'urne qui en contenait $n-2$ au départ. On a donc

   $$\boxed{Y = n-2-(X-1) = n-1-X}$$

   On en déduit que

   $$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[n-1-X] = n-1-\mathbb{E}[X] = n-1-\frac{n+1}{3} = \frac{3n-3-n-1}{3} = \boxed{\frac{n-4}{3}}$$

07.3 On considère un dé cubiqe, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face "k" soit proportionnelle à k, avec pour coefficient de proportionnalité le réel α.
On lance une fois le dé et on note X le numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X en fonction de α.
2. Déterminer la valeur de α.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $\mathbb{E}[Y]$.

1. On a $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$, et puisqu'on sait que la probabilité d'obtenir la face k est égale à αk, on en déduit que :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	α	2α	3α	4α	5α	6α

2. On doit avoir nécessairement $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$, donc

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha = \alpha\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \alpha\frac{6 \times 7}{2} = 21\alpha$$

On doit donc avoir nécessairement $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{21}}$.

3.
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k^2\alpha = \alpha\frac{6 \times 7 \times 13}{6} = \frac{7 \times 13}{21} = \boxed{\frac{13}{3}}$$

4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$.

On a directement que $Y(\Omega) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}\right\}$ et on a :

k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(Y = k)$	α	2α	3α	4α	5α	6α

Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{n} \alpha = n\alpha = \boxed{\frac{n}{21}}$$

07.4

1. Soit X une VAR discrète prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités respectives 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit Y une VAR discrète prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$. Déterminer la loi de Y sachant que $\mathbb{P}(Y < 5) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y > 5) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4)$.
   Calculer alors l'espérance et la variance de Y.

1.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2

On a alors $\mathbb{E}[X] = 0.1 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.3 \times 4 + 0.1 \times 5 + 0.2 \times 6 = \boxed{3.7}$

De plus, $\mathbb{E}[X^2] = 0.1 \times 1 + 0.2 \times 4 + 0.1 \times 9 + 0.3 \times 16 + 0.1 \times 25 + 0.2 \times 36 = \boxed{16.3}$.

Enfin, $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 16.3 - (3.7)^2 = 16.3 - 13.69 = \boxed{2.61}$.

2. On sait que $\mathbb{P}(Y = 6) = \mathbb{P}(Y > 5) = \frac{1}{2}$. De plus, $\mathbb{P}(Y = 5) = 1 - \mathbb{P}(Y = 6) - \mathbb{P}(Y < 5) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) = 1 - \mathbb{P}(Y = 5) - \mathbb{P}(Y = 6) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.
   On en déduit donc la loi de Y.

k	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

On a alors $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{6} \times 3 + \dfrac{1}{6} \times 4 + \dfrac{1}{6} \times 5 + \dfrac{1}{2} \times 6 = \boxed{5}$

De plus, $\mathbb{E}[Y^2] = \dfrac{1}{6} \times 9 + \dfrac{1}{6} \times 16 + \dfrac{1}{6} \times 25 + \dfrac{1}{2} \times 36 = \boxed{\dfrac{79}{3}}$.

Enfin, $\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{79}{3} - 5^2 = \boxed{\dfrac{4}{3}}$.

07.5 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs de boules dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.
On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 et de X_2.
2. Conjecturer la loi de X_n et démontrer le résultat par récurrence.

On notera $\forall i \geqslant 1$, B_i : "la i-ième boule tirée est blanche" et R_i : "la i-ième boule tirée est rouge".

1. Soit X_1 le nombre de boules blanches obtenues au cours du 1er tirage. On a bien évidemment
   - $X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!]$

- $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{X_1 \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!])}$$

Soit X_2 le nombre de boules blanches obtenues au cours du 2ème tirage.
- $X_2(\Omega) = [\![0,1,2]\!]$
- $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{X_2 \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![0,2]\!])}$$

2. On peut donc conjecturer que X_n suivra une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
   Montrons le résultat par récurrence.
   Notons pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$: "$X_n \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$".
   - On a montré dans la question précédente que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vérifiées.
   - Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié.
     Montrons que X_{n+1} suit une loi uniforme sur $[\![0,n+1]\!]$.

     Lors des $n+1$ premiers tirages, on a toujours pu tirer une boule blanche ou non, donc on a $X_{n+1}(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n+1}) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\cdots\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

     Soit $k \in [\![1,n+1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}\big((X_n = k) \cap R_{n+1}) \cup ((X_n = k-1) \cap B_{n+1})\big) \\ &= \mathbb{P}((X_n = k) \cap R_{n+1}) + \mathbb{P}\left((X_n = k-1) \cap B_{n+1}\right) \quad \text{(car incompatibles)} \\ &= \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n = k-1)\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) + \mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1})\right)\end{aligned}$$

     Si on sait que $X_n = k$, on a donc rajouté k boules blanches dans l'urne et $n-k$ boules rouges dans l'urne au cours des n premiers tirages. Il y a donc $k+1$ boules blanches dans l'urne et $n-k+1$ boules rouges. On a donc

$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \frac{n-k+1}{n+2}$$

     Si on sait que $X_n = k-1$, on a donc rajouté $k-1$ boules blanches dans l'urne au cours des n premiers tirages. Il y a donc k boules blanches dans l'urne. On a donc

$$\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) = \frac{k}{n+2}$$

     On a donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n-k+1}{n+2} + \frac{k}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

     On a donc bien montré que X_{n+1} suivait une loi uniforme sur $[\![0,n+1]\!]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée.
   - Par récurrence, on en déduit donc que $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et donc X_n suit toujours une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

07.6 On joue à Pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir Face est égale à $\frac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la VAR égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$.
On note de plus, F_i l'événement "obtenir Face au i-ième lancer".

1. Expliciter les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$, $[X = 5]$ à l'aide des événements F_i et $\overline{F_i}$.
2. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.
3. A l'aide de la Formule des Probabilités Totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour tout $n \geqslant 1$.
5. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

1. On a :

$$[X = 2] = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$$
$$[X = 3] = F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}$$
$$[X = 4] = (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4})$$
$$[X = 5] = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5})$$

2. On a $p_1 = \mathbb{P}(X = 1) = 0$ car il faut au moins deux lancers pour avoir 2 Piles consécutivement.
Les lancers sont indépendants. On a donc :

$$p_2 = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}\overline{F_2}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

De même,

$$\begin{aligned}
p_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}\\
p_4 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}\\
p_5 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\\
&= \frac{4}{243} + \frac{8}{243} + \frac{8}{243} = \frac{20}{243}
\end{aligned}$$

3. Soit $n \geqslant 3$. Cherchons $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. On doit donc avoir eu deux Pile consécutifs pour la première fois aux lancers $n-1$ et n.
1er Cas : Au premier lancer, on fait Pile. Alors nécessairement au deuxième lancer, on fait Face. Puis on doit lancer la pièce $n-2$ fois et avoir Pile aux lancers numéros $n-3$ et $n-2$, autrement dit, puisque les lancers sont indépendants, on est ramenés à la même expérience, et l'événement des $n-2$ derniers lancers sera de même probabilité que l'événement $(X = n-2)$.
2ème Cas : Au premier lancer, on fait Face. Puis on doit lancer la pièce $n-1$ fois et avoir Pile aux lancers numéros $n-2$ et $n-1$, autrement dit, puisque les lancers sont indépendants, on est ramenés à la même expérience, et l'événement des $n-1$ derniers lancers sera de même probabilité que l'événement $(X = n-1)$

On en déduit donc que

$$p_n = \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(X = n-2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(X = n-1) = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$$

4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour tout $n \geqslant 1$. La suite (p_n) vérifie une récurrence linéaire double.

$$p_n - \frac{1}{3}p_{n-1} - \frac{2}{9}p_{n-2} = 0$$

L'équation caractéristique est

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$$

$\Delta = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$, il y a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{2}{3}$$

On sait donc qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 3, p_n = \alpha \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

En remplaçant avec les valeurs de p_3, p_4, p_5, on trouve :

$$\alpha = \frac{4}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3}$$

autrement dit

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ p_n = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

Remarquons que cette relation est encore vérifiée pour $n = 2$.

5. Déjà vérifions que X admet bien une espérance.

$$\sum_{n \geqslant 2} np_n = \sum_{n \geqslant 2} \left(n\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

On reconnaît la somme de deux séries géométriques dérivées convergentes, donc la série converge bien

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{-4}{9} \sum n = 2^{+\infty} n \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{16}{27} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{-4}{9} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1\right) + \frac{16}{27} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1\right) \\
&= \frac{-4}{9} \left(\frac{1}{(1 - \frac{4}{3})^2} - 1\right) + \frac{16}{27} \left(\frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} - 1\right) \\
&= \frac{-4}{9} 8 + \frac{16}{27} 8 \\
&= \frac{32}{27}
\end{aligned}$$

07.7 Les bouteilles de vin de la supérette du coin ont une chance sur 5 d'être bouchonnées et inbuvables (indépendamment les une des autres). Si on achète un lot de n bouteilles, à partir de quelle valeur de n aura-t-on en moyenne au moins une bouteille bouchonnée ?

Notons X le nombre de bouteilles bouchonnées sur les n achetées à la supérette.

- On a une épreuve : "on choisit une bouteille", qui possède deux issues :
  - un succès : "la bouteille est bouchonnée", de probabilité $\frac{1}{5}$
  - un échec : "la bouteille n'est pas bouchonnée", de probabilité $\frac{4}{5}$
- On répète n fois cette épreuve de manière indépendante.
- X compte le nombre de succès lors de ces n épreuves.

On sait donc que X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{5}\right)$.

On sait entre autres que

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!], \qquad \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

De plus, on a

$$\mathbb{E}[X] = n \times \frac{1}{5} = \frac{n}{5}, \quad \mathbb{V}[X] = n \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4n}{25}$$

On nous demande ici quels sont les n tels que $\mathbb{E}[X] \geqslant 1$

$$\mathbb{E}[X] \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{n}{5} \geqslant 1 \Longleftrightarrow n \geqslant 5$$

A partir de 5 bouteilles achetés, on aura donc en moyenne au moins une bouteille bouchonnée.

07.8 Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui.
On note X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager deux cas : avec ou sans remise)
2. Le conciegre est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour, 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour-là ?

Notons pour tout $i \geqslant 1$, l'événement A_i : "la i-ième clé testée est la bonne".

1. <u>**Sans remise**</u>

   - On a $X(\Omega) = [\![1, 10]\!]$ car on peut trouver la bonne clé dès la première tentative, ou bien même se tromper jusqu'à 9 fois et avoir la bonne clé à la dixième tentative.
   - $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{12}$ (car il y a 10 clés dont une seule qui convient, avec équiprobabilité).
   - $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{11}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{12}$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \cdots \times \frac{n-1-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-1-(k-2)} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

On a donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{12}$.

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])}$$

Avec remise

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car on peut trouver la bonne clé dès la première tentative, ou bien même se tromper k fois pour n'importe quel $k \in \mathbb{N}$ et trouver la clé au $(k+1)$-ième essai.

- On a une épreuve : "on choisit une clé", qui possède deux issues :
  - un succès : "la clé est la bonne", de probabilité $\dfrac{1}{10}$
  - un échec : "la clé n'est pas la bonne", de probabilité $\dfrac{9}{10}$
- On répète (a priori une infinité de fois) cette épreuve de manière indépendante.
- X désigne le numéro du premier succès.

On sait donc que X suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{1}{10}\right)$.

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)}$$

On a $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = k) = \left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1} \dfrac{1}{10}$

2. Notons I l'événement "le concierge est ivre". On a donc

$$\mathbb{P}(I) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(\overline{I}) = \frac{2}{3}$$

On nous demande ici de trouver $\mathbb{P}_I(X = 8)$.
Remarquons que si I est réalisé, nous nous retrouvons dans le cas où on choisit les clés avec remise, donc selon une loi géométrique. Si $\overline{I}$ est réalisé, nous nous retrouvons à l'inverse dans le cas où on choit les clés sans remise, donc selon une loi uniforme.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X=8)}(I) &= \frac{\mathbb{P}(I \cap (X = 8))}{\mathbb{P}(X = 8)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(I)\mathbb{P}_I(X = 8)}{\mathbb{P}(I \cap (X = 8)) + \mathbb{P}(\overline{I} \cap (X = 8))} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^7 \frac{1}{10}}{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^7 \frac{1}{10} + \frac{2}{3}\frac{1}{10}}
\end{aligned}$$

07.9 Le prof de maths interroge ses n élèves sur une question de cours. Il y a 2 élèves qui savent la réponse, mais il ne sait pas lesquels, les $n-2$ autres ne savent pas la réponse. Le prof interroge donc les élèves un à un, au hasard. On note X la variable aléatoire égale au rang du premier élève qui (enfin) sait la réponse, et Y la variable aléatoire égale au rang du second élève qui sait la réponse.

1. Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.
2. Par une symétrie, montrer que Y a la même loi que $n+1-X$. En déduire son espérance et sa variance.

1. Notons pour tout $i \geqslant 1$, A_i : "Le i-ième élève interrogé sait la réponse".
   - Au pire, le prof interrogera les $n-2$ élèves qui ne savent pas la réponse en premier et ensuite, il choisit nécessairement un des deux élèves sérieux, donc les valeurs de X peuvent aller jusqu'à $n-1$. On a donc
   $$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]}$$
   - $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{2}{n}$ car on a n élèves dont 2 élèves qui connaissent la réponse et le prof choisit de manière équiprobable.
   - Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Calculons $\mathbb{P}(X=k)$.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k)\\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k)\\ &\quad \text{(d'après la formule des probabilités composées)}\end{aligned}$$

   On a $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \dfrac{n-2}{n}$ puisque $n-2$ élèves parmi les n ne savent pas la réponse.
   On a $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = \dfrac{n-3}{n-1}$ puisqu'il reste $n-1$ élèves dont $n-3$ qui ne connaissent pas la réponse.
   Plus généralement, pour tout $i \in [\![1, k-2]\!]$, $\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}}) = \dfrac{n-2-i}{n-i}$, puisque si on a déjà interrogé i élèves qui ne savent pas, il reste $n-2-i$ élèves qui ne savent pas et toujours les 2 élèves sérieux.
   De même, $\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) = \dfrac{2}{n-(k-1)}$.

   Par conséquent,
   $$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{n-k}{n-k+2}\frac{2}{n-k+1} = \boxed{\frac{2(n-k)}{n(n-1)}}$$

   La variable X admet bien entendu une espérance et une variance, puisque $X(\Omega)$ est fini.
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2) = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(n\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = n - \frac{2n-1}{3} = \boxed{\frac{n+1}{3}}\end{aligned}$$

   Rappelons que
   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk^2 - k^3) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \right) = \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{(n-1)n}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{6}}\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18} = \boxed{\frac{n^2 - n - 2}{18}}$$

2. Donnons la liste des élèves appelés au hasard, du premier jusqu'au dernier, appelons-la la liste 1. Donnons aussi la liste 2 des élèves en parant du dernier interrogé jusqu'au premier interrogé. Le rang du deuxième élève sérieux dans la liste 1 est Y par définition, et dans la liste 2 son rang est $X' = n + 1 - Y$.
   D'autre part, dans la liste 2, c'est le nom du deuxième élève sérieux qui apparaît alors en premier. On en déduit que X' a la même loi que X :
   $$\mathbb{P}(n + 1 - Y = k) = \mathbb{P}(X = k)$$
   autrement dit
   $$\mathbb{P}(Y = n + 1 - k) = \mathbb{P}(X = k)$$
   Donc
   $$\mathbb{P}(Y = k') = \mathbb{P}(Y = n + 1 - (n + 1 - k')) = \mathbb{P}(X = n + 1 - k')$$
   Ainsi, Y suit la même loi que $n + 1 - X$.
   On en déduit que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[n + 1 - X] = n + 1 - \mathbb{E}[X] = (n + 1) - \frac{n+1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}(n + 1)}$.
   De plus, $\mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[n + 1 - X] = (-1)^2 \mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[X] = \boxed{\frac{n^2 - n - 2}{18}}$.

07.10 Pour un sondage, une équipe de télévision se rend dans un lycée contenant N étudiants. Parmi ces N lycéens, une proportion p est constituée de majeurs (cela représente donc Np élèves, les $N(1 - p)$ autres étant mineurs). Ne pouvant interroger tout le monde, l'équipe de télévision se résout à interroger seulement n étudiants différents, choisis au hasard au sein du lycée.
On note X le nombre d'étudiants majeurs finalement interrogés pour le sondage. Déterminer la loi de X.

On a $X \subset [\![0, n]\!]$ car le nombre d'étudiants interrogés étant de n, donc le nombre de majeurs parmi eux doit être compris entre 0 et n.

Ici l'expérience aléatoire est "on choisit n étudiants différents parmi les N élèves du lycée". L'univers Ω correspond donc à l'ensemble des sous-ensembles de n élèves parmi les N. On a $Card(\Omega) = \binom{N}{n}$, et on est en situation d'équiprobabilité sur Ω, puisque a priori, on choisit le groupe de n élèves au hasard parmi tous les groupes de n élèves possibles.

Cherchons donc $Card(X = k)$, autrement dit, le nombre de situations où il y a exactement k majeurs parmi les n interviewés et $n - k$ mineurs parmi les n interviewés :

– on choisit les k majeurs parmi les Np possibles. Il y a donc $\binom{Np}{k}$ possibilités
– puis, on choisit les $n - k$ mineurs parmi les $N - Np$ possibles. Il y a donc $\binom{N - Np}{n - k}$

On a donc $Card(X=k) = \binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}$. Alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{Card(X=k)}{Card(\Omega)} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Remarquons qu'on peut améliorer $X(\Omega)$. En effet, dans la formule des probabilités, $\mathbb{P}(X=k)=0$ dès que $k > Np$ ou dès que $n-k > N-Np$, donc dès que $k > Np$ ou $k < n-(N-Np)$.

En effet, puisqu'il n'y a "que" Np majeurs dans le lycée tout entier, on ne peut pas avoir les valeurs X supérieures à Np. De même, s'il n'y a "que" $N-Np$ mineurs dans le lycée et qu'on a $n-(N-Np)>0$, il y aura forcément des majeurs et X devra être supérieur ou égal à $n-(N-Np)$. On a donc

$$\boxed{X(\Omega) = [\![\max(0, n-N+Np), \min(n, Np)]\!]}$$

07.11 Soit X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{1+X}$.

Déjà rappelons que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Soit $Y = \frac{1}{1+X}$. Puisque X ne prend qu'un nombre fini de valeurs (ici $n+1$), la variable Y prend également un nombre fini de valeurs possibles, et donc Y admet bien une espérance. On applique le théorème de Transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell}p^{\ell-1}(1-p)^{n-\ell+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\times\frac{1}{p}\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{(n+1)-\ell} \\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{(n+1)-\ell} - (1-p)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left((p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}\right) \\
&= \boxed{\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}}
\end{aligned}$$

07.12 Soit X une V.A. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer.

Déjà rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Soit $Y = \frac{1}{1+X}$. D'après le théorème de transfert, on sait que, sous réserve d'existence, on a :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \sum_{k\in X(\Omega)} \frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X = k)$$

Regardons donc si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X = k)$ converge.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}
\end{aligned}$$

On reconnaît le reste d'une série exponentielle convergente, donc la série converge bien. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X = k) &\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1 \right) \\
&= \boxed{\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}}
\end{aligned}$$

07.13 Les statistiques montrent que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennent suit une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
On se fixe une journée "test" et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'accidents survenu au cours de cette journée.

1. Quelle est la probabilité qu'il survienne 3 accidents ou plus lors de cette journée ?
2. Même question si l'on sait qu'au moins un accident a eu lieu ?

On sait que $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3)$. Donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$$

1. On nous demande $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \\
&= 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} - e^{-3}\frac{3^1}{1!} - e^{-3}\frac{3^2}{2!} \\
&= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - e^{-3}\frac{9}{2} \\
&= 1 - \frac{17}{2}e^{-3}
\end{aligned}$$

2. On nous demande $\mathbb{P}_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 3)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 3) &\frac{\mathbb{P}((X \geqslant 1) \cap (X \geqslant 3))}{\mathbb{P}(X \geqslant 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \geqslant 3)}{\mathbb{P}(X \geqslant 1)} \\
&= \frac{1 - \frac{17}{2}e^{-3}}{1 - e^{-3}}
\end{aligned}$$

07.14 Le service de dépannage technique du métro dispose d'équipes intervenant lors d'incidents sur les voies. Pour des causes diverses, les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les incidents se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque incident, la probabilité d'un retard est 0.25.

1. Un conducteur de métro relève quatre incidents lors de sa journée de service. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où le conducteur a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement "le conducteur subit au moins un retard".
2. Au cours des années 2010 et 2011 le service central de dépannage du métro enregistre une succession d'incidents. Le rang du premier incident pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2010 (resp. 2011) définit une variable aléatoire Y (resp. Z).
   (a) Déterminer les lois de Y et Z.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $T = \max(Y, Z)$. Calculer $\mathbb{P}(T \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire la loi de T et son espérance.

1. (a) • On a une épreuve : "un incident provoque un retard ou non", qui possède deux issues :
   – un succès : "l'incident provoque du retard", de probabilité $\dfrac{1}{4}$
   – un échec : "l'incident ne provoque pas de retard", de probabilité $\dfrac{3}{4}$
   • On répète 4 fois cette épreuve de manière indépendante.
   • X compte le nombre de succès lors de ces 4 épreuves.

   On sait donc que X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}\left(4, \dfrac{1}{4}\right)$.

   On a donc :
   – $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$
   – $\forall k \in [\![0, 4]\!], \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{4}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\left(\dfrac{3}{4}\right)^{4-k}$

- $\mathbb{E}[X] = 4 \times \dfrac{1}{4} = 1$
- $\mathbb{V}[X] = 4 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$

(b) On cherche donc $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

2. (a) • On a une épreuve : "un incident provoque un retard ou non", qui possède deux issues :
   - un succès : "l'incident provoque du retard", de probabilité $\dfrac{1}{4}$
   - un échec : "l'incident ne provoque pas de retard", de probabilité $\dfrac{3}{4}$

   • On répète a priori une infinité de fois cette épreuve de manière indépendante.
   • Y désigne le numéro du premier succès lors de ces épreuves.

   On sait donc que Y suit une loi Géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

   On a donc :
   - $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
   - $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1} \dfrac{1}{4}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
   - $\mathbb{V}[X] = \dfrac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{3}{4} \times 4^2 = 12.$

   De même, Z suit également une loi Géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{1}{4}\right)$, donc la même loi que Y.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{i} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k}{1 - \frac{3}{4}} \\
&= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k
\end{aligned}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leqslant k) &= \mathbb{P}(\max(Y, Z) \leqslant k) \\
&= \mathbb{P}((Y \leqslant k) \cap (Z \leqslant k)) \\
&= \mathbb{P}(Y \leqslant k)\mathbb{P}(Z \leqslant k) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)^2
\end{aligned}$$

On a en fait calculé la fonction de répartition de T. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=k) &= \mathbb{P}(T \leqslant k) - \mathbb{P}(T \leqslant k-1) \\
&= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)^2 - \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)^2 \\
&= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(2-\frac{7}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{2k-2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1}}
\end{aligned}$$

Vérifions que nous avons bien $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=k) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} - \frac{7}{16}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{\ell} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - \frac{7}{16}\frac{1}{1-\frac{9}{16}} \\
&= 2-1=1
\end{aligned}$$

La variable T admet-elle une espérance ?

$$\sum_{k \geqslant 1} k\mathbb{P}(T=k) = \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}k\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1}\right)$$

On reconnaît la somme de deux termes de séries convergentes (séries dérivées géométriques), donc la série converge bien et T admet une espérance. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}k\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{7}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{9}{16}\right)^2} \\
&= 8-\frac{16}{7} \\
&= \boxed{\frac{40}{7}}
\end{aligned}$$