**07.1** Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.
Soit $X$ le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de $X$.

**07.2** Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne.
On appelle $X$ le rang du tirage de la première boule blanche et $Y$ le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de $X$ et $\mathbb{E}[X]$.
2. Exprimer $Y$ en fonction de $X$ et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

**07.3** On considère un dé cubiqe, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face "$k$" soit proportionnelle à $k$, avec pour coefficient de proportionnalité le réel $\alpha$.
On lance une fois le dé et on note $X$ le numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de $X$ en fonction de $\alpha$.
2. Déterminer la valeur de $\alpha$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de $Y$ et $\mathbb{E}[Y]$.

**07.4**

1. Soit $X$ une VAR discrète prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités respectives 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2. Calculer l'espérance et la variance de $X$.
2. Soit $Y$ une VAR discrète prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$. Déterminer la loi de $Y$ sachant que $\mathbb{P}(Y<5) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y>5) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(Y=4)$.
   Calculer alors l'espérance et la variance de $Y$.

**07.5** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs de boules dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.
On note, pour tout entier naturel $n$ non nul, $X_n$ le nombre de boules blanches obtenues au cours des $n$ premiers tirages.

1. Déterminer la loi de $X_1$ et de $X_2$.
2. Conjecturer la loi de $X_n$ et démontrer le résultat par récurrence.

**07.6** On joue à Pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir Face est égale à $\dfrac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note $X$ la VAR égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n$ la probabilité de l'événement $[X=n]$.
On note de plus, $F_i$ l'événement "obtenir Face au $i$-ième lancer".

1. Expliciter les événements $[X=2]$, $[X=3]$, $[X=4]$, $[X=5]$ à l'aide des événements $F_i$ et $\overline{F_i}$.
2. Déterminer la valeur de $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$.
3. A l'aide de la Formule des Probabilités Totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $p_n = \dfrac{2}{9} p_{n-2} + \dfrac{1}{3} p_{n-1}$.
4. En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \geqslant 1$.
5. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

**07.7** Les bouteilles de vin de la supérette du coin ont une chance sur 5 d'être bouchonnées et inbuvables (indépendamment les une des autres). Si on achète un lot de $n$ bouteilles, à partir de quelle valeur de $n$ aura-t-on en moyenne au moins une bouteille bouchonnée ?

**07.8** Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui.
On note $X$ le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de $X$ (envisager deux cas : avec ou sans remise)
2. Le conciegre est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour, 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour-là ?

**07.9** Le prof de maths interroge ses $n$ élèves sur une question de cours. Il y a 2 élèves qui savent la réponse, mais il ne sait pas lesquels, les $n-2$ autres ne savent pas la réponse. Le prof interroge donc les élèves un à un, au hasard. On note $X$ la variable aléatoire égale au rang du premier élève qui (enfin) sait la réponse, et $Y$ la variable aléatoire égale au rang du second élève qui sait la réponse.

1. Déterminer la loi de $X$, son espérance, sa variance.
2. Par une symétrie, montrer que $Y$ a la même loi que $n+1-X$. En déduire son espérance et sa variance.

**07.10** Pour un sondage, une équipe de télévision se rend dans un lycée contenant $N$ étudiants. Parmi ces $N$ lycéens, une proportion $p$ est constituée de majeurs (cela représente donc $Np$ élèves, les $N(1-p)$ autres étant mineurs). Ne pouvant interroger tout le monde, l'équipe de télévision se résout à interroger seulement $n$ étudiants différents, choisis au hasard au sein du lycée.
On note $X$ le nombre d'étudiants majeurs finalement interrogés pour le sondage. Déterminer la loi de $X$.

**07.11** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{1+X}$.

**07.12** Soit $X$ une V.A. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer.

**07.13** Les statistiques montrent que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennent suit une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
On se fixe une journée "test" et on désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'accidents survenu au cours de cette journée.

1. Quelle est la probabilité qu'il survienne 3 accidents ou plus lors de cette journée ?
2. Même question si l'on sait qu'au moins un accident a eu lieu ?

**07.14** Le service de dépannage technique du métro dispose d'équipes intervenant lors d'incidents sur les voies. Pour des causes diverses, les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les incidents se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque incident, la probabilité d'un retard est 0.25.

1. Un conducteur de métro relève quatre incidents lors de sa journée de service. On désigne par $X$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où le conducteur a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement "le conducteur subit au moins un retard".
2. Au cours des années 2010 et 2011 le service central de dépannage du métro enregistre une succession d'incidents. Le rang du premier incident pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2010 (resp. 2011) définit une variable aléatoire $Y$ (resp. $Z$).
   (a) Déterminer les lois de $Y$ et $Z$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $T = \max(Y, Z)$. Calculer $\mathbb{P}(T \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire la loi de $T$ et son espérance.