06.1 On lance 2 pièces. On désigne par P le côté Pile et par F le côté Face. Ecrire l'univers Ω_1 lorsque l'on considère les pièces discernables puis l'univers Ω_2 lorsque l'on considère les pièces non discernables.

06.2 Soit le lancement d'un dé cubique non truqué. Déterminer la tribu engendrée par $\{1\}$ et $\{2\}$ la plus petite possible, et qui soit stable par complémentarité, réunion, intersection et différence.
Mêmes questions avec la tribu engendrée par $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$.

06.3 On lance un dé cubique à plusieurs reprises. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $S_i =$ "le i-ième lancer donne un 6".

1. Ecrire à l'aide des événements S_i et $\overline{S_i}$ l'événement $A =$ "la première apparition du 6 a lieu après le cinquième lancer".
2. Est-ce le même événement que $B =$ "le 6 n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers" ?
3. Est-ce le même événement que $D = \bigcup\limits_{i \geqslant 6} S_i$?
4. On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $A_i =$ "le i-ième lancer donne un 1".
   Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :
   $E_1 = \bigcap\limits_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad E_2 = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{4} \overline{A_i} \right) \cap \left(\bigcap\limits_{i=5}^{+\infty} A_i \right), \quad E_3 = \bigcup\limits_{i>4} A_i.$
5. Ecrire à l'aide des événements A_i l'événement "on obtient au moins une fois le 1 après le n-ième lancer".

06.4 On considère $\Omega = [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \alpha k$, où α est un réel fixé. Déterminer α en fonction de n pour qu'à partir de la famille $(p_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, on puisse définir une loi de probabilité.

06.5 Soit a un réel non nul. On considère $\Omega = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \dfrac{1}{8} \left(\dfrac{2 + a^k}{k!} \right)$. Déterminer la valeur de a pour que la famille $(p_k)_{k \geqslant 0}$ définisse une loi de probabilité sur Ω.

06.6 Au loto, une grille est composée de 49 numéros. On réalise alors un tirage simultané de 5 numéros.

1. Calculer la probabilité d'avoir la grille avec les 5 bons numéros.
2. Calculer la probabilité d'avoir la grille avec au moins deux bons numéros.

06.7 On compose au hasard un numéro de téléphone de 8 chiffres, les chiffre étant compris entre 0 et 9 et pouvant être répétés. Quelle est la probabilité pour que les chiffres forment une suite strictement croissante ?

06.8 On jette simultanément deux dés à 6 faces équilibrés. Trouver la probabilité que :

1. un des deux dés ait fourni le nombre 3 sachant que la somme des 2 dés a donné 6.
2. la somme des deux dés fournisse un nombre supérieur ou égal à 7 sachant que les 2 numéros sont de même parité.

06.9 Une galette des rois est découpée en 12 parts égales. Elle ne contient qu'une seule fève. On a 12 convivent qui choisissent au hasard leur part, les uns après les autres, du plus jeune au plus âgé. Vaut-il mieux être plus jeune ou plus vieux pour avoir le maximum de chances d'avoir la fève ?

06.10 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate que :

– il y a parmi les malades, 1 vacciné pour 4 non-vaccinés
– il y a 1 malade sur 12 parmi les vaccinés.

Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?
Le vaccin est-il efficace ? Autrement-dit, comparer les probabilités de tomber malade pour un non-vacciné et pour un vacciné.

06.11 Trois usines produisent des moteurs identiques qui sont stockés dans un même entrepot dont la répartition est donnée :
- 50% des moteurs proviennent de l'usine A, 30% de l'usine B et 20% de l'usine C.
- 5% des moteurs produits dans l'usine A sont défectueux, 8% pour l'usine B et 4% pour l'usine C;

Calculer la probabilité pour qu'un moteur défectueux provienne de l'usine A.

06.12 Une personne écrit des lettres personnelles à n correspondants, mais la secrétaire, croyant qu'il s'agit d'une circulaire, met les étiquettes d'adresses au hasard.

1. Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ? On pourra désigner par C_k l'événement : "la lettre numéro k arrive bien à son destinataire".
2. Les événements C_1 et C_2 sont-ils indépendants ?
3. Calculer $\mathbb{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_k})$ pour $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$.
4. Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire ?
5. On suppose désormais que le nombre de lettres est infini. Que peut-on dire de l'événement : "au moins une lettre arrive bien à son destinataire ?

06.13 Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle et Alice commence. Les lancers sont indépendants. Le gagnant est le premier à obetnir un "6". Quand Alice ou Bruno gagne, la partie s'arrête.
On s'intéresse aux trois événements suivants :
- A : "victoire d'Alice"
- B : "victoire de Bruno"
- D : "pas de vainqueur"

On note F_n : "fin de la partie au n-ième lancer" et S_j : "le j-ième lancer donne un 6".

1. En exprimant l'événement D à l'aide des événemennts S_j, déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.
2. Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j et en déduire la probabilité de F_n.
3. Exprimer les événements A et B à l'aides événements F_n.
4. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

06.14 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanche supplémentaire, et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue.

1. On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

06.15 Soient deux points A et B sur lesquels une puce saute. Lorsqu'elle est en A, la probabilité qu'elle atterisse en B à l'instant suivant est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle reste en A est $1-p$. De même pour B avec q et $1-q$. On note a_n la probabilité qu'elle soit en A à l'instant n. De même b_n est la probabilité qu'elle soit en B à l'instant n.
On suppose que la puce est en A à l'instant initial 0.

1. Déterminer une relation entre a_{n+1}, a_n et b_n.
2. Montrer que $a_n + b_n = 1$. En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Déterminer a_n puis b_n en fonction de n.

06.16 On considère le jeu palpitant suivant : on lance trois pièces équilibrées, si les trois pièces donnent Pile le jeu s'arrête, sinon on recommence.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête au n-ième lancer. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Calculer la probabilité qu'au n-ième lancer, le jeu ne se soit pas encore arrêté. En déduire à nouveau que le jeu s'arrête presque sûrement.