05.1 Un jeu comporte 32 cartes (4 couleurs, 8 cartes par couleur). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent au moins un cœur ou une dame ?
3. Combien ne contiennent pas plus de deux couleurs ?
4. Combien de mains contiennent les quatre As ?
5. Combien de mains contiennent quatre trèfles dont la dame ?
6. Combien de mains ne contiennent pas de cœur ?
7. Combien de mains contiennent au plus trois carreaux ?

1. Une main correspond à une combinaison de 8 cartes parmi les 32 possibles, car on les choisit simultanément, donc il n'y a pas d'ordre intervenant. Il y a donc finalement $\boxed{\binom{32}{8}}$ mains possibles.
2. Notons A l'ensemble des mains contenant au moins un cœur et notons B l'ensemble des mains contenant au moins une dame. On cherche $Card(A \cup B)$. Or, l'événement contraire est $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Combien vaut $Card(\overline{A} \cap \overline{B})$?

   On cherche donc les mains qui ne contiennent aucun cœur et aucune dame. Il y a 21 cartes répondant à cette condition, le nombre de mains possibles est donc $\binom{21}{8}$
   Ainsi $Card(\overline{A} \cap \overline{B}) = \binom{21}{8}$, donc $Card(A \cup B) = \binom{32}{8} - \binom{21}{8}$
3. On cherche $Card(A \cup B)$ où A désigne l'ensemble des mains contenant exactement une couleur, et B désigne l'ensemble des mains contenant exactement deux couleurs. Ces deux ensembles étant disjoints, on a $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
   Pour $Card(A)$, on choisit une couleur (4 possiblités), puis pour cette couleur, il n'y a qu'une possibilité : prendre toutes les cartes de la couleur. Ainsi $Card(A) = 4$.
   Pour $Card(B)$, on commence par choisir les deux couleurs ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités), puis une fois que les deux couleurs sont choisies, on peut faire n'importe quelle main avec les 16 cartes de ces deux couleurs, sauf les deux mains ne comprenant qu'une seule couleur : Il y a donc
   $$Card(B) = \binom{4}{2}\left(\binom{16}{8} - 2\right)$$
   Ainsi Le nombre cherché est :
   $$Card(A) + Card(B) = \boxed{4 + 6\left(\binom{16}{8} - 2\right)}$$
4. Il suffit donc de choisir les 4 autres cartes, parmi les 28 possibles. Il y a donc $\boxed{\binom{28}{4}}$ possibilités.
5. Il faut choisir la dame de trèfle : une possibilité. Puis, il faut choisir les trois autres trèfles : $\binom{7}{3}$ possibilités. Puis, il faut choisir les quatre autre cartes parmi les 24 qui ne sont pas des trèfles : $\binom{24}{4}$ possibilités.
   Finalement le nombre de possibilités est $\boxed{\binom{7}{3}\binom{24}{4}}$.

6. Il suffit donc de choisir 8 cartes parmi les 24 qui ne sont pas des cœurs, il y a donc $\boxed{\binom{24}{8}}$ possibilités.
7. On sépare les mains contenant au plus trois carreaux en plusieurs groupes :
   – les mains qui ne contiennent aucun carreau : il y a $\binom{24}{8}$ possibilités.
   – les mains qui contiennent exactement un carreau : on choisit un carreau, puis on choissit les 7 autres cartes, il y a $\binom{8}{1}\binom{24}{7}$ possibilités.
   – les mains qui contiennent exactement deux carreaux : on choisit les deux carreaux, puis on choisit les 6 autres cartes, il y a $\binom{8}{2}\binom{24}{6}$ possibilités
   – les mains qui contiennent exactement trois carreaux : on choisit les trois carreaux, puis on choisit les 5 autres cartes, il y a $\binom{8}{3}\binom{24}{5}$ possibilités.

   Ainsi le nombre de possibilités est :
$$\binom{24}{8}+\binom{8}{1}\binom{24}{7}+\binom{8}{2}\binom{24}{6}+\binom{8}{3}\binom{24}{5}$$

05.2 On dispose de 10 livres, dont 4 de maths et 4 d'économie.

1. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres sur une étagère ?
2. Combien y a-t-il de façons de sorte que les livres de maths restent groupés ? et qu'à la fois les livres de maths et les livres d'économie restent groupés ?
3. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres sur l'étagère, de sorte que les 8 livres de maths ou économie restent groupés ensemble, mais en alternant ?

1. Ranger les 10 livres sur l'étagère revient à choisir une permutation des 10 livres (ordonner tous les livres), il y a donc 10! possibilités.
2. On agit d'abord comme si les livres de maths formaient un gros livre : on doit donc simplement choisir un ordre entre 7 livres (les 6 livres et le bloc "maths") : il y a 7! possibilités. Une fois cet ordre choisi, on ordonne les 4 livres de maths à l'intérieur du bloc de maths, il y a 4! possibilités.
   Au final, il y a 7!4! possibilités.

   Si on souhaite que les livres de maths restent groupés, on agit d'abord comme si les livres de maths formaient un gros livre et de même pour l'économie : on doit donc simplement choisir un ordre entre 4 livres (le bloc "maths", le bloc "économie", et les deux livres restants) : il y a 4! possibilités. Une fois cet ordre choisi, on ordonne les 4 livres de maths à l'intérieur du bloc de maths, il y a 4! possibilités, puis on ordonne les 4 livres d'économie à l'intérieur du bloc d'économie, il y a 4! possibilités.
   Au final, il y a 4!4!4! possibilités.

3. On agit d'abord comme si les livres de maths/éco formaient un gros livre : on doit donc simplement choisir un ordre entre 3 livres (le bloc "maths/éco" et les deux livres restants) : il y a 3! possibilités. Une fois cet ordre choisi, on choisit le 1er livre du groupe maths/éco : il y a 8 possibilités, le choix du premier livre détermine l'alternance maths/économie pour les livres suivants. Le deuxième livre a 4 possibilités (dans l'autre catégorie), puis les livres ont respectivement $3, 3, 2, 2, 1, 1$ possibilités. Au final, il y a $3!8 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2 \times 3!4!4!$ possibilités.

05.3 Un tiroir contient 5 paires de chaussettes noires, 3 paires vertes et 3 paires rouges. Chaque paire de chaussettes contient un pied droit et un pied gauche. On choisit simultanément 2 chaussettes au hasard dans le tiroir.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent deux chaussettes noires ? deux chaussettes de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent deux pieds gauches ? un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de tirages permettent de reconstituer une paire de chaussettes noires ?

1. Il y a 10 chaussettes noires, 6 vertes et 6 rouges. On choisir simultanément 2 chaussettes au hasard parmi les 22 possibles, il y a donc $\binom{22}{2} = \frac{22\times 21}{2} = 11 \times 21$ possibilités.
2. Combien de tirages amènent deux chaussettes noires ?
   Il suffit de choisir deux chaussettes parmi les 10 noires : $\binom{10}{2} = 45$ possibilités.

   Combien de tirages avec deux chaussettes de même couleur ?
   1er cas : les tirages avec deux chausettes noires : 45 possibilités
   2ème cas : les tirages avec deux chaussettes vertes : $\binom{6}{2} = 15$ possibilités
   3ème cas : les tirages avec deux chaussettes rouges : $\binom{6}{2} = 15$ possibilités
   Ainsi, il y a au final $45 + 15 + 15 = 75$ possibilités.
3. Il y a exactement 11 paires de chaussettes en tout, donc 11 chaussettes gauches. Il y a donc $\binom{11}{2} = 55$ possibilités.
   Il y a exactement 11 chaussettes gauches, et 11 chaussettes droites. Pour effectuer un tel tirage, il faut choisir 1 chaussette gauche (11 possibilités), puis choisir 1 chaussette droite (11 possibilités). Il y a donc $11^2 = 121$ possibilités.
4. Pour reconstituer une paire de chaussettes noires, il faut choisir un pied gauche noir et un pied gauche noir. Il y a 5 chaussettes gauches noires et 5 chaussettes droites noires, il y a donc 25 tirages qui permettent de reconstituer une paire de chaussettes noires.

05.4 Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires, a priori indiscernables l'une de l'autre. On tire successivement 6 boules dans l'urne avec remise. Un résultat est une succession de boules blanches et noires.

1. Combien de résultats ont :
   (a) 5 boules noires et 1 boule blanche dans cet ordre ?
   (b) au plus 1 boule noire ?
   (c) 3 boules blanches et 3 boules noires ?
   (d) au moins 1 boule blanche ?
2. Mêmes questions avec des tirages :
   – successifs sans remise.
   – successifs avec remise, boules numérotées (discernables)
   – successifs sans remise, boules numérotées
   – simultanément, boules numérotées.

1. Si les tirages sont successifs avec remise et si les boules sont indiscernables, un résultat est une suite de "Noir" et "Blanc" : L'ensemble E de tous les tirages possibles est donc l'ensemble $E = \{N, B\}^6$, ensemble des 6-listes de l'ensemble $\{N, B\}$. En particulier, on a $Card(E) = 2^6$.
   (a) Soit A_1 l'ensemble des résultats obtenant 5 boules noires puis 1 boule blanche. Alors $Card(A_1) = 1$ puisque A ne contient qu'un élément : le tirage (N, N, N, N, N, B).
   (b) Soit A_2 l'ensemble des résultats ayant au plus 1 boule noire. Ainsi $A_2 = C \cup D$ où C désigne l'ensemble des résultats ayant exactement 0 boule noire et D ceux ayant exactement 1 boule noire.
   $Card(C) = 1$ puisque C ne contient que l'élément (B, B, B, B, B, B). De plus, pour choisir un élément de D qui contient une boule noire (et donc cinq boules blanches), il suffit de choisir la place de la boule noire : il y a $\binom{6}{1} = 6$ éléments dans D.
   Au final, on a donc $Card(A_2) = 1 + 6 = 7$.
   (c) Soit A_3 l'ensemble des résultats ayant 3 boules blanches et 3 boules noires. Pour choisir un élément de A_3, il suffit de choisir la place des 3 boules blanches sur les 6 places possibles : il y a $\binom{6}{3} = 20$ possibilités. Ainsi $Card(A_3) = 20$.
   (d) Soit A_4 l'ensemble des résultats ayant au moins une boule blanche. Alors le complémentaire de cet ensemble est $\overline{A_4}$: l'ensemble des résultats n'ayant aucune boule blanche. $\overline{A_4}$ ne contient qu'un seul élément qui est (N, N, N, N, N, N), donc $Card(\overline{A_4}) = 1$. On en déduit que $Card(A_4) = Card(E) - Card(\overline{A_4}) = 2^6 - 1$.
2. Si les tirages sont successifs sans remise et si les boules sont indiscernables, un résultat est une suite de 6 "Noir" ou "Blanc" ne pouvant pas contenir plus de 5 boules blanches. L'ensemble E de tous les tirages possibles est donc l'ensemble $E = \{N, B\}^6 \setminus \{(B, B, B, B, B, B)\}$, qui est de cardinal $2^6 - 1$.
   (a) Soit A_1 l'ensemble des résultats obtenant 5 boules noires puis 1 boule blanche. Alors $Card(A_1) = 1$ puisque A ne contient qu'un élément : le tirage (N, N, N, N, N, B).
   (b) Soit A_2 l'ensemble des résultats ayant au plus 1 boule noire. Ainsi $A_2 = C \cup D$ où C désigne l'ensemble des résultats ayant exactement 0 boule noire et D ceux ayant exactement 1 boule noire.
   $Card(C) = 0$ puisqu'aucun résultat ne peut contenir 6 boules blanches. Pour choisir un élément de D qui contient une boule noire (et donc cinq boules blanches), il suffit de choisir la place de la boule noire : il y a $\binom{6}{1} = 6$ éléments dans D.
   Au final, on a donc $Card(A_2) = 0 + 6 = 6$.
   (c) Soit A_3 l'ensemble des résultats ayant 3 boules blanches et 3 boules noires. Pour choisir un élément de A_3, il suffit de choisir la place des 3 boules blanches sur les 6 places possibles : il y a $\binom{6}{3} = 20$ possibilités. Ainsi $Card(A_3) = 20$.
   (d) Soit A_4 l'ensemble des résultats ayant au moins une boule blanche. Alors le complémentaire de cet ensemble est $\overline{A_4}$: l'ensemble des résultats n'ayant aucune boule blanche. $\overline{A_4}$ ne contient qu'un seul élément qui est (N, N, N, N, N, N), donc $Card(\overline{A_4}) = 1$. On en déduit que $Card(A_4) = Card(E) - Card(\overline{A_4}) = (2^6 - 1) - 1 = 2^6 - 2$.
3. Si les tirages sont successifs avec remise et si les boules sont numérotées, un résultat est une suite de 6 éléments de l'ensemble $\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$. L'ensemble E de tous les tirages possibles est donc l'ensemble des 6-listes de cet ensemble contenant 13 éléments. On a donc $Card(E) = 13^6$.
   (a) Soit A_1 l'ensemble des résultats obtenant 5 boules noires puis 1 boule blanche. Il faut choisir successivement chacune des boules noires (8 possibilités à chaque fois), puis choisir la boule blanche (5 possibilités). Ainsi, $Card(A_1) = 8^5 \times 5$.
   (b) Soit A_2 l'ensemble des résultats ayant au plus 1 boule noire. Ainsi $A_2 = C \cup D$ où C désigne l'ensemble des résultats ayant exactement 0 boule noire et D ceux ayant exactement 1 boule noire.
   Pour choisir un élément de C, il suffit de choisir successivement 6 boules blanches (avec répétition possible), on a donc $Card(C) = 5^6$. Pour choisir un élément de D qui contient une boule noire (et donc cinq boules blanches), on commence par choisir la place de la boule noire (il y a $\binom{6}{1} = 6$

possibilités), puis on choisit quelle sera la boule noire (il y a 8 possibilités), puis on choisit les 5 boules blanches qui complètent le résultat (5 poossibilités pour chaque boule).
Au final, on a donc $Card(A_2) = 5^6 + 6 \times 8 \times 5^5 = 5^5 \times 53$

(c) Soit A_3 l'ensemble des résultats ayant 3 boules blanches et 3 boules noires. Pour choisir un élément de A_3, on commence par choisir la place des 3 boules blanches sur les 6 places possibles : il y a $\binom{6}{3} = 20$ possibilités. Puis, on choisit successivement quelles sont les 3 boules blanches (5 possibilités à chaque fois), enfin on choisit sucessivement quelles sont les 3 boules noires (8 possibilités à chaque fois). Au final, on a $Card(A_3) = 20 \times 5^3 \times 8^3$.

(d) Soit A_4 l'ensemble des résultats ayant au moins une boule blanche. Alors le complémentaire de cet ensemble est $\overline{A_4}$: l'ensemble des résultats n'ayant aucune boule blanche. Pour choisir un élément de $\overline{A_4}$, il suffit de choisir 6 boules noires successivement, donc $Card(\overline{A_4}) = 8^6$. On en déduit que $Card(A_4) = Card(E) - Card(\overline{A_4}) = 13^6 - 8^6$.

4. Si les tirages sont successifs sans remise et si les boules sont numérotées, un résultat est une suite de 6 éléments distincts de l'ensemble $\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$. L'ensemble E de tous les tirages possibles est donc l'ensemble des 6-arrangements de cet ensemble contenant 13 éléments. On a donc $Card(E) = A_{13}^6 = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$.

(a) Soit A_1 l'ensemble des résultats obtenant 5 boules noires puis 1 boule blanche. Il faut choisir 5 boules noires dans l'ordre et sans remise($A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ possibilités), puis choisir la boule blanche (5 possibilités). Ainsi, $Card(A_1) = A_8^5 \times 5$.

(b) Soit A_2 l'ensemble des résultats ayant au plus 1 boule noire. Ainsi $A_2 = C \cup D$ où C désigne l'ensemble des résultats ayant exactement 0 boule noire et D ceux ayant exactement 1 boule noire.
Pour choisir un élément de C, il suffit de choisir successivement 6 boules blanches sans répétition : ce n'est pas possible puisqu'il n'y a que 5 boules blanches, on a donc $Card(C) = 0$. Pour choisir un élément de D qui contient une boule noire (et donc cinq boules blanches), on commence par choisir la place de la boule noire (il y a $\binom{6}{1} = 6$ possibilités), puis on choisit quelle sera la boule noire (il y a 8 possibilités), puis on choisit l'ordre des 5 boules blanches qui doivent toutes apparaître une et une seule fois, (5! poossibilités au total).
Au final, on a donc $Card(A_2) = 6 \times 8 \times 5! = 8 \times 6!$

(c) Soit A_3 l'ensemble des résultats ayant 3 boules blanches et 3 boules noires. Pour choisir un élément de A_3, on commence par choisir la place des 3 boules blanches sur les 6 places possibles : il y a $\binom{6}{3} = 20$ possibilités. Puis, on choisit successivement quelles sont les 3 boules blanches dans l'ordre ($5 \times 4 \times 3$ possibilités), enfin on choisit sucessivement quelles sont les 3 boules noires ($8 \times 7 \times 6$ possibilités). Au final, on a $Card(A_3) = 20 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 10 \times 8!$.

(d) Soit A_4 l'ensemble des résultats ayant au moins une boule blanche. Alors le complémentaire de cet ensemble est $\overline{A_4}$: l'ensemble des résultats n'ayant aucune boule blanche. Pour choisir un élément de $\overline{A_4}$, il suffit de choisir 6 boules noires successivement sans remise, donc $Card(\overline{A_4}) = 8 \times 7 \times \cdots \times 3$. On en déduit que $Card(A_4) = Card(E) - Card(\overline{A_4}) = A_{13}^6 - A_8^6$.

5. Si les tirages sont simultanés et si les boules sont numérotées, un résultat est un ensemble de 6 éléments distincts de l'ensemble $\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$. L'ensemble E de tous les tirages possibles est donc l'ensemble des 6-combinaisons de cet ensemble contenant 13 éléments. On a donc $Card(E) = \binom{13}{6}$.

(a) Soit A_1 l'ensemble des résultats obtenant 5 boules noires et 1 boule blanche (il n'y a plus d'ordre possible ici). Il faut choisir 5 boules noires parmi les 8 possibles ($\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$ possibilités), puis choisir la boule blanche (5 possibilités). Ainsi, $Card(A_1) = 56 \times 5$.

(b) Soit A_2 l'ensemble des résultats ayant au plus 1 boule noire. Ainsi $A_2 = C \cup D$ où C désigne l'ensemble des résultats ayant exactement 0 boule noire et D ceux ayant exactement 1 boule noire.
Pour choisir un élément de C, il suffit de choisir une poignée 6 boules blanches dans l'urne : ce n'est pas possible puisqu'il n'y a que 5 boules blanches, on a donc $Card(C) = 0$. Pour choisir un

élément de D qui contient une boule noire (et donc cinq boules blanches), on choisir la boule noire (8 possibilités), puis on choisit la poignée de 5 boules blanches, ($\binom{5}{5} = 1$ poossibilité).
Au final, on a donc $Card(A_2) = 8$

(c) Soit A_3 l'ensemble des résultats ayant 3 boules blanches et 3 boules noires. Pour choisir un élément de A_3, on choisit les 3 boules blanches parmi les 5 possibles ($\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ possibilités), puis on choisit les 3 boules noires parmi les 8 possibles($\binom{8}{3} = 56$ possibilités). Au final, on a $Card(A_3) = 560$.

(d) Soit A_4 l'ensemble des résultats ayant au moins une boule blanche. Alors le complémentaire de cet ensemble est $\overline{A_4}$: l'ensemble des résultats n'ayant aucune boule blanche. Pour choisir un élément de $\overline{A_4}$, il suffit de choisir 6 boules noires dans l'urne, donc $Card(\overline{A_4}) = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$. On en déduit que $Card(A_4) = Card(E) - Card(\overline{A_4}) = \binom{13}{6} - 28$.

05.5 Dans une assemblée de n membres, on doit désigner un bureau de p membres, dont une personne doit être le président.

1. Combien de bureaux peut-on désigner (sans considérer le président) ?
2. On désigne d'abord le bureau, puis le président parmi le bureau. Combien y a-t-il de choix de bureau+président ?
3. On désigne d'abord le président, puis les personnes qui l'accompagnent dans le bureau. Combien y t-t-il de choix bureau+président ?
4. Quelle identité a-t-on démontré ?

1. Un bureau est un ensemble de p personnes parmi les n possibles. Il y a donc $\displaystyle\binom{n}{p}$ bureaux possibles.
2. On choisit d'abord le bureau : il y a $\binom{n}{p}$ possibilités. Puis, une fois le bureau choisi, on choisit un président parmi les p membres du bureau : il y a donc p possibilités pour le choix du président au sein du bureau. Au final, il y a donc $p\binom{n}{p}$ possibilités pour le choix bureau+président.
3. On choisit d'abord le président dans l'assemblée : il y a n possibilités. Puis, une fois le président choisi, il nous faut choisir les $p-1$ personnes qui vont l'accompagner dans le bureau, on doit choisir ces $p-1$ personnes parmi les $n-1$ personnes restantes dans l'assemblée. Il y a donc $n\binom{n-1}{p-1}$ possibilités pour le choix bureau+président.
4. Le nombre de possibilités bureau+président ne doit a priori pas dépendre de ce qu'on choisit en premier : bureau puis président, ou l'inverse président puis bureau. Ainsi, les deux nombres trouvés dans les questions 2 et 3 doivent être égaux :
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
On a donc retrouvé que
$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

05.6 Soit $n \geqslant 2$. On a un ensemble E de n personnes. Chacune envoie une lettre et une seule à l'une des $n-1$ autres personnes.

1. Combien y a-t-il de situations possibles ?
2. Zoé est une de ces personnes. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le nombre total de situations possibles où Zoé reçoit exactement j lettres. Quelle identité a-t-on démontré ?

1. Pour choisir une situation :
   - on choisit à qui la personne 1 a envoyé sa lettre : elle avait $n-1$ possibilités
   - puis, on choisit à qui la personne 2 a envoyé sa lettre : elle avait $n-1$ possibilités
   - $\vdots$
   - puis, on choisit à qui la personne n a envoyé sa lettre : elle avait $n-1$ possibilités

   Au final, il y a donc $(n-1)^n$ situations possibles.
2. On se fixe $j \in [\![0, n-1]\!]$. Notons A_j l'ensemble des situations où Zoé reçoit exactement j lettres. Pour choisir une situation de l'ensemble A_j, :
   - on choisit quelles sont les j personnes qui ont envoyé une lettre à Zoé : il y a $\binom{n-1}{j}$ possibilités.
   - Puis, pour chacune de ces j personnes, elle n'ont qu'une possibilité pour envoyer leur lettre : à Zoé.
   - Puis, pour les $n-1-j$ autres personnes (qui ne sont pas Zoé et qui n'ont pas envoyé à Zoé), chacune a envoyé une lettre à quelqu'un qui n'est pas Zoé, chacune de ces personnes avait donc $n-2$ possibilités.
   - Enfin, Zoé envoie sa lettre à une des $n-1$ personnes : il y a $n-1$ possibilités.

   Au final, $Card(A_j) = \binom{n-1}{j}(n-2)^{n-1-j}(n-1)$.

   Clairement, si E désigne l'ensemble des situations possibles, on a $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ qui forme une partition de l'ensemble E. Ainsi
   $$Card(E) = \sum_{j=0}^{n-1} Card(A_j)$$
   autrement dit
   $$\boxed{(n-1)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}(n-2)^{n-1-j}(n-1)}$$
   Remarquons que cette identité est bien vraie d'après le binôme de Newton. En effet :
   $$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}(n-2)^{n-1-j}(n-1) = (n-1)\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 1^j (n-2)^{n-1-j} = (n-1)(n-2+1)^{n-1} = (n-1)^n$$