04.1 Calculer les sommes partielles des séries de termes généraux suivants : pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}, \qquad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad w_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

En cas de convergence de la série, donner sa somme.

1. Notons pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$.
   Calculons les sommes partielles associées à cette suite.
   Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}} \end{aligned}$$

   Ici, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ln(2)}$, donc la suite (S_n) des sommes partielles converge. On a donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge et même ici

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\ln(2)}$$

2. Notons pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
   Calculons les sommes partielles associées à cette suite.
   Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) \\ &= \boxed{-\ln(n)} \end{aligned}$$

   Ici, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite (S_n) des sommes partielles diverge. On a donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ diverge.

Remarque : on pouvait se douter que la série allait diverger car

$$v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison on pouvait se douter que $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ allait diverger.

3. Notons pour tout $n \geqslant 2$, $w_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
   Calculons les sommes partielles associées à cette suite.
   Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n} w_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1}\right) \\ &= \boxed{1-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

   Ici, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc la suite (S_n) des sommes partielles converge. On a donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ converge et même

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

   Remarque : on pouvait se douter que la série allait converger car

$$w_n = \frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

   et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), donc par comparaison on pouvait se douter que $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ allait converger.

04.2 On définit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathcal{N}$: $\mathcal{P}(n)$: "$0 < u_n < 1$" est vraie.

   – $n = 0$, $u_0 \in]0,1[$: c'est dans l'énoncé, donc $0 < u_0 < 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   – Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n, $\mathcal{P}(n)$ soit vrai, i.e. que $0 < u_n < 1$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.

     On a $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1-u_n)$.
     Comme $0 < u_n < 1$, on a aussi $0 < 1 - u_n < 1$, donc par produit $0 < u_n(1-u_n) < 1$, ainsi, on a bien $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.
   – Par récurrence, la propriété est donc bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   De plus, ici on a que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$$

donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, la suite (u_n) est bien convergente.

Notons pour l'instant ℓ sa limite. Le nombre ℓ doit nécessairement vérifier

$$\ell = \ell - \ell^2$$

par passage à la limite dans l'égalité donnée par l'énoncé, ce qui nous donne donc que $\ell^2 = 0$, soit $\ell = 0$. Ainsi, la suite (u_n) converge bien vers 0.

2. Regardons si la série de terme général u_n^2 converge. Pour cela, regardons la somme partielle de cette série. Pour $n \geqslant 0$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$$

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, on en déduit que la suite (S_n) converge vers u_0. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge bien et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$$

04.3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

1. Montrons par récurrence que pour tout n, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n > 0$" est vraie.
   - $n = 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, donc on a bien $u_0 > 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, i.e. que $u_n > 0$.
     Alors, $e^{-u_n} > 0$ également (car $x \mapsto e^x$ est strictement positive) et donc par produit, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$: $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.
   - Par récurrence, on a donc bien que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Les termes de la suite étant strictement positifs, on peut étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\forall n \geqslant 0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$$

car la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est toujours plus petite que 1 sur $]0, +\infty[$. Ainsi, la suite (u_n) est donc strictement décroissante. Comme la suite est minorée par 0, on en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0, +\infty[$.
La limite ℓ doit nécessairement vérifier

$$\ell = \ell e^{-\ell} \Longleftrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \Longleftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -\ell = 0 \Longleftrightarrow \ell = 0$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$. Remarquons qu'on a alors
$$\forall n \geqslant 0,\ v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n e^{-u_n}) = \ln(u_n) - \ln(e^{-u_n}) = v_n - u_n$$
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit donc que
$$\forall n \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$
4. Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition $v_n = \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi, la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est donc divergente.

$\boxed{\textbf{04.4}}$ Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. Etudier la monotonie de cette suite et déterminer sa limite éventuelle.
2. Etudier la nature des séries suivantes :
   (a) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$
   (b) $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
   (c) $\sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}$
   (d) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{1+u_n}$
   (e) $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$
3. On souhaite étudier la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$.
   (a) Soit S_n la somme partielle au rang n. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont des suites adjacentes.
   (b) Conclure sur la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

1. Etudions la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est dérivable sur $[1, +\infty[$ et
$$\forall x \geqslant 1,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
Donc f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. On en déduit que la suite (u_n) n'est pas monotone (car $u_1 < u_2$, mais qu'elle est décroissante à partir de u_3.

   D'autre part, puisque $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, on a directement que (u_n) converge vers 0.

2. (a) <u>Etude de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$</u>
   Pour $n \geqslant 3$, on sait que
$$\frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$
   et $\forall n \geqslant 3$, $\frac{\ln(n)}{n}$ et $\frac{1}{n}$ sont positifs. Or, $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$), donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ diverge, donc également $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

(b) Etude de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Regardons la somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_2)$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, donc la suite des sommes partielles diverge vers $-\infty$. Ainsi, la série diverge.

(c) Etude de la série $\sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n} = 1$. Comme le terme général de la série ne tend par vers 0, on est certain que la série diverge.

(d) Etude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on en déduit que

$$\frac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{u}{}_n$$

Les deux termes étant bien positifs, et ayant $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ qui diverge, le théorème d'équivalence des séries à termes positifs affirme que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n}$ diverge également.

(e) Etude de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$

On a : $\forall n \geqslant 1,\ u_n^2 = \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$.

Or, on sait que

$$(\ln(n))^2 = o\left(\sqrt{n}\right)$$

puisque $\dfrac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow 0}$ 0. On en déduit donc que

$$u_n^2 = \frac{(\ln(n))^2}{n^2} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann pour $\alpha > 1$), donc par le théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$ converge.

3. (a) On pose pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$.

Regardons la monotonie de $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$.

Soit $n \geqslant 2$, alors

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$$

(car la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3). Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.

Regardons la monotonie de $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$.

Soit $n \geqslant 2$, alors

$$S_{2n+3}-S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+3}(-1)^k u_k-\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k=(-1)^{2n+2}u_{2n+2}+(-1)^{2n+3}u_{2n+3}=u_{2n+2}-u_{2n+3}\geqslant 0$$

(car la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3). Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
Regardons la limite de $(S_{2n+1}-S_{2n})_{n\geqslant 2}$.
Soit $n \geqslant 2$, alors

$$S_{2n+1}-S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k-\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u_k=(-1)^{2n+1}u_{2n+1}=-u_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

(car la suite (u_n) converge vers 0).
Ainsi, on a bien montré que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) Comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, on en déduit qu'elles convergent toutes les deux, vers une même limite. Puisque les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite, on en déduit alors que (S_n) converge. Puisque la suite des sommes partielles converge, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ converge.

$\boxed{\textbf{04.5}}$ Etudier la nature des séries suivantes et calculer leur somme si possible :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2^n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+3}{n!}a^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+3n}{2^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2^n}{n!}$

On a

$$\frac{n+2^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{sim}\frac{2^n}{n!}$$

Or, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$ converge (série exponentielle), donc par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2^n}{n!}$ converge bien.

Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n!}+\frac{2^n}{n!}\right)$$

Peut-on séparer ?
On a $\dfrac{n}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{\ell\geqslant 0}\frac{1}{\ell!}$ qui converge.
On a déjà dit que $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$ converge.

Donc on peut bien séparer en deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} + e^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e^2 \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} + e^2 \\
&= \boxed{e+e^2}
\end{aligned}$$

2. $\underline{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{n!} a^n}$

$$\frac{n+3}{n!} a^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-1)!} a^n = a \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$$

Or, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{\ell\geqslant 0} \frac{a^\ell}{\ell!}$ qui converge (série exponentielle). Donc par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{n!} a^n$ converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n!} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{na^n}{n!} + \frac{3a^n}{n!} \right)$$

Peut-on séparer ?
On a $\dfrac{na^n}{n!} = a \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{\ell\geqslant 0} \frac{a^\ell}{\ell!}$ qui converge (série exponentielle).
On a déjà dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3\frac{a^n}{n!}$ converge.
Donc on peut bien séparer en deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n!} a^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{na^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} 3\frac{a^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na^n}{n!} + 3e^a \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + 3e^a \\
&= a\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{a^\ell}{\ell!} + 3e^a \\
&= ae^a + 3e^a = \boxed{(a+3)e^a}
\end{aligned}$$

3. $\underline{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}}$

Posons $u_n = \frac{n^2}{n!}$ pour $n \geqslant 1$. Puisque les u_n sont strictement positifs, on peut regarder la règle de

D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc d'après D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= e + e = \boxed{2e}
\end{aligned}$$

4. $\underline{\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+3n}{2^n}}$

$$\frac{n^2+3n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ converge (série géométrique dérivée seconde), donc par théorèmes d'équivalences des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+3n}{2^n}$ converge.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3n}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)+4n}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

5. $\underline{\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)}$

C'est une série comportant des ln : ce ne peut donc être ni une série géométrique ni exponentielle. Regardons donc les sommes partielles.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(2\ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+2)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k+2)\right) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+2) \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, par composition de limites, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (S_n) converge vers $\ln(2)$. Ainsi, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln(2)$$

04.6 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$
4. $u_n = 2^{2n-1}e^{-n}$
5. $u_n = \left(e^{1/n} - 1\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
6. $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Or, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann divergente) et les deux suites sont positives. On en déduit par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.
2. $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   Puisque $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puisque le terme général ne tend pas vers 0, on est certain que la série diverge.
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$: voir exercice 04.4
4. $u_n = 2^{2n-1}e^{-n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{e}\right)^n$.

   Comme $\frac{4}{e} > 1$ (car $e \simeq 2.7$), la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge (série géométrique de raison $q > 1$).
5. $$u_n = \left(e^{1/n} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Or, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Série de Riemann convergente), et les deux suites sont positives, donc par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

6. $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est de signe non constant. Regardons donc la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|$. Or,

$$|u_n| = \left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Série de Riemann convergente), et les deux suites sont positives, donc par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

7.

$$u_n = \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{\sqrt{n^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^{3/2}}$$

Or, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Série de Riemann convergente), donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{-1}{n^{3/2}}$ converge également. les deux suites sont négatives, donc par le théorème d'équivalence des séries à termes négatifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.