$\boxed{\textbf{04.1}}$ Calculer les sommes partielles des séries de termes généraux suivants : pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}, \qquad v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right), \qquad w_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

En cas de convergence de la série, donner sa somme.

$\boxed{\textbf{04.2}}$ On définit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

$\boxed{\textbf{04.3}}$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

$\boxed{\textbf{04.4}}$ Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. Etudier la monotonie de cette suite et déterminer sa limite éventuelle.
2. Etudier la nature des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n}$
   (e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$
3. On souhaite étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$.
   (a) Soit S_n la somme partielle au rang n. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont des suites adjacentes.
   (b) Conclure sur la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

$\boxed{\textbf{04.5}}$ Etudier la nature des séries suivantes et calculer leur somme si possible :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2^n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{n!} a^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+3n}{2^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

$\boxed{\textbf{04.6}}$ Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$
4. $u_n = 2^{2n-1}e^{-n}$
5. $u_n = \left(e^{1/n}-1\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
6. $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$