03.1 Calculer le terme général des suites suivantes :

1. $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} = -2a_n,\ a_1 = 3$
2. $\forall n \geqslant 1,\ b_{n+1} = 2b_n + 3,\ b_1 = 10$
3. $\forall n \geqslant 0,\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0,\ u_0 = u_1 = 1$
4. $\forall n \geqslant 0,\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n,\ v_0 = v_1 = 1$

1. La suite (a_n) vérifie :
$$\forall n \geqslant 1,\ \ a_{n+1} = -2a_n$$
La suite (a_n) est donc géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $a_1 = 3$. On sait donc que
$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = a_1 q^{n-1} = \boxed{3 \times (-2)^{n-1}}$$

2. La suite (b_n) vérifie :
$$\forall n \geqslant 1,\ \ b_{n+1} = 2b_n + 3$$
La suite (b_n) est donc arithmético-géométrique.
On résout l'équation caractéristique associée :
$$x = 2x + 3 \iff x = -3$$
On pose alors une nouvelle suite (c_n) définie par $\forall n \geqslant 1, c_n = b_n - (-3) = b_n + 3$.
D'après le cours, la suite (c_n) doit être géométrique. Vérifions-le :
$$\forall n \geqslant 1,\ \ c_{n+1} = b_{n+1} + 3 = (2b_n + 3) + 3 = 2b_n + 6 = 2(b_n + 3) = 2c_n$$
Ainsi, la suite (c_n) est géométrique, de raison 2. On sait donc que
$$\forall n \geqslant 1,\ \ c_n = c_1 2^{n-1}$$
Or, $b_1 = 10$, donc $c_1 = b_1 + 3 = 13$. Ainsi
$$\forall n \geqslant 1,\ \ c_n = 13 \times 2^{n-1}$$
On en déduit que
$$\forall n \geqslant 1,\ \ b_n = c_n - 3 = \boxed{13 \times 2^{n-1} - 3}$$

3. La suite (u_n) vérifie :
$$\forall n \geqslant 0, \quad 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$$
Ainsi, la suite est récurrente linéaire double. On résout l'équation caractéristique associée :
$$2x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1$$
Comme l'équation admet deux solutions distinctes (qui sont -1 et $1/2$), on sait que :
$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta\,(-1)^n$$
L'égalité doit être vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En particulier :
$n = 0$: $\alpha + \beta = u_0 = 1$

$n = 1 : \frac{1}{2}\alpha - \beta = u_1 = 1$
On a donc un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}(-1)^n}$$

4. La suite (v_n) vérifie :

$$\forall n \geqslant 0, \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$$

Ainsi, la suite est récurrente linéaire double. On résout l'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 4x - 4 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Comme l'équation n'admet qu'une unique solution (qui est 2), on sait que :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$$

L'égalité doit être vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En particulier :
$n = 0 : \alpha + 0 = v_0 = 1$
$n = 1 : 2\alpha + 2\beta = v_1 = 1$
On a donc un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n - \frac{1}{2}n2^n = 2^n - n2^{n-1}}$$

03.2 Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$.
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) converge et calculer la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$.

1. Soit $n \geqslant 1$. On sait que $n > 0$, $n + 2 > 0$ et $(n+1)^2 > 0$, donc

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$$

De plus, montrons que $u_n < 1$, i.e. que $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$, autrement dit, montrons que $n(n+2) < (n+1)^2$.
Or, $(n+1)^2 - n(n+2) = (n^2 + 2n + 1) - n^2 - 2n = 1 > 0$. Donc on a bien $(n+1)^2 > n(n+2)$, donc

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$$

On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$.

2. Soit $n \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= \frac{(n^3+3n^2+3n+1)(n+3) - n(n^3+6n^2+12n+8)}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0 \end{aligned}$$

   Puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} > u_n$, la suite (u_n) est donc strictement croissante.

3. La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1, donc (u_n) est convergente.
   De plus, on a

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

   Ainsi, la suite (u_n) converge vers 1.

03.3 On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et les suites (v_n) et (w_n) définies par $\forall n \geqslant 1$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.

1. Regardons la monotonie de la suite (v_n).
   Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc croissante.

   Regardons la monotonie de la suite (w_n).

Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3-1}}{2n+3} \\ &= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{-(2n+3)+(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc décroissante.

Regardons si $(v_n - w_n)$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$.

$$v_n - w_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, on a montré que :
- (v_n) est croissante,
- (w_n) est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = 0$

Ainsi, les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

2. Puisque les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes, on en déduit que (v_n) converge, que (w_n) converge, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
   Or, (v_n) désigne la suite extraite de (u_n) comprenant les indices pairs, et (w_n) désigne la suite extraite de (u_n) comprenant les indices impairs. Ainsi, puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, on peut en déduire que (u_n) converge également.

Remarque : on vient en fait de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

03.4 Déterminer les limites si elles existent des suites suivantes :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad v_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$$

$$x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}, \qquad y_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

1. $$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

   Or puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a

   $$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Ainsi
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
Alors, par composition des limites, on en déduit que
$$\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 = e$$
On a donc montré que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e}$$

2.
$$v_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n} = \frac{3^n\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n}$$
Or, $-1<\frac{-2}{3}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n=0$, on en déduit que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

3.
$$\begin{aligned} x_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} &= \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=1$, on en déduit que le dénominateur admet pour limite 2, et ainsi
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

4.
$$y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
Ainsi,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2}}$$

03.5 Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}, \qquad w_n = \ln(1+n^3)$$

$$x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}, \qquad y_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right)\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right)\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^5 - 1\right)}$$

1.
$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{n^2}}$$

2.
$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

On sait que $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, mais on ne peut pas sommer les équivalents. On a l'impression que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. Montrons-le proprement :

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

On a donc bien $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$, donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

3. On sait que $1+n^3 \underset{n\to+\infty}{n}{}^3$ et $n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On est donc dans le cas où on peut composer par ln. On a donc

$$w_n = \ln(1+n^3) \underset{n\to+\infty}{\ln}(n^3) = \boxed{3\ln(n)}$$

4. On a $x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}$.
On a $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par composition de limites. On sait alors que

$$\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

De plus $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on en déduit donc que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

5. On a $y_n = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right)\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right)\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^5 - 1\right)}$.

Regardons tous les membres séparément :

- $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{\pi}{6}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- On sait que $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \qquad \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

- $e^{1/n} - e^{-1/n} = e^{-1/n}\left(e^{2/n} - 1\right)$.
  Or, puisque $\frac{-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a $e^{-1/n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, et on a donc

$$e^{1/n} - e^{-1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(e^{2/n} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{n}$

En regroupant toutes ces informations :

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1}{2n^2}}{\frac{2}{n} \times \frac{5}{n}} = \frac{-\sqrt{3}}{4n^2} \times \frac{n^2}{10} = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{40}}$$

03.6

1. Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(x+1) - x$.
   En déduire le signe de f.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$. La suite (u_n) est-elle monotone ? convergente ? si oui, préciser sa limite.

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. En effet :
   - $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ (polynôme) et à valeurs dans $[1, +\infty[$.
   - $u \mapsto \ln(u)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$.
   - Par composition, $x \mapsto \ln(x+1)$ est bien dérivable sur $[0, +\infty[$.
   - $x \mapsto -x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$
   - Par somme, f est bien dérivable sur $[0, +\infty[$.

   On a
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1 - (x+1)}{x+1} = \frac{-x}{x+1} \leqslant 0$$
   La fonction f' étant négative sur $\mathbb{R}^+$ (et même strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   De plus, $f(0) = \ln(0) - 0 = 0$.
   Par ailleurs, $f(x) = \ln(x+1) - x = \ln(x+1) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{x+1}{e^x}\right)$
   Comme $\frac{x+1}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, par composition on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
   On a le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$		$-$	

2. Notons pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $u_n > 0$". Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - $n = 0$. On sait d'après l'énoncé que $u_0 = 1$, donc u_0 est bien défini et on a $u_0 > 0$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée.
   - Soit $n \geqslant 0$. On suppose que pour cet entier n, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, i.e. que u_n existe et $u_n > 0$. Puisque $u_n > 0$, on a $u_n + 1 > 0$, donc on peut bien définir le nombre $\ln(u_n + 1)$, ainsi u_{n+1} existe. De plus, par croissance de la fonction ln,
   $$u_n + 1 > 0 \Longrightarrow u_{n+1} = \ln(u_n + 1) > \ln(1) = 0$$
   Ainsi, on a bien que $u_{n+1} > 0$. On a donc montré que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie également.
   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Regardons si la suite (u_n) est monotone.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
   $$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n = f(u_n) \leqslant 0$$
   Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

   La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc elle converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}^+$. De plus, la limite ℓ doit vérifier
   $$\ell = \ln(\ell + 1)$$
   soit
   $$f(\ell) = 0$$
   Or, d'après le tableau de variations de f, la fonction f étant strictement décroissante, la seule valeur de ℓ possible est donc $\ell = 0$. On en déduit donc que la suite (u_n) converge vers 0.

03.7 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$
2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $u_n \geqslant 1$".
   - $n = 0$, on a $u_0 \geqslant 1$ d'après l'énoncé. Ainsi, u_0 est bien défini et $u_0 \geqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. Alors puisque $u_n \geqslant 1 > 0$, on peut bien définir le nombre $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$. Ainsi u_{n+1} est bien défini. De plus, comme $u_n > 0$, on a $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n} \geqslant u_n^2 \geqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est bien vérifiée.
   - Par récurrence, on a donc bien que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{u_n^3 - u_n^2 + 2}{u_n}$$
Essayons de factoriser le numérateur.
Soit $P(X) = X^3 - X^2 + 2$. $x = -1$ est une racine du polynôme. En factorisant par $X + 1$, on obtient : $P(X) = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$. Le polynôme $X^2 - 2X + 2$ n'admet alors plus de racines dans $\mathbb{R}$. on a donc
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(u_n^2 - 2u_n + 2)}{u_n} \geqslant 0$$
Donc (u_n) est croissante.
3. Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors, cette limite ℓ doit vérifier :
$$\ell = \ell^2 + \frac{2}{\ell} \Longrightarrow \ell^3 - \ell^2 + 2 = 0 \Longrightarrow (\ell + 1)(\ell^2 - 2\ell + 2) = 0 \Longrightarrow \ell = -1$$
La seule limite possible de la suite (u_n) est donc -1. Or, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On ne peut donc pas avoir une limite égale à -1 : contradiction.
On a donc nécessairement que la suite (u_n) diverge. Puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

03.8 Soit f la fonction définie sur $]-1, 2]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-1, 2[$ et prouver qu'il existe un réel $M < 1$ tel que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant M$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$
3. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution ℓ dans $]-1, 2]$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant M^n \left|\ell - \dfrac{1}{2}\right|$
5. La suite (u_n) est-elle convergente ?

1. La fonction $x \mapsto \frac{2-x}{1+x}$ est une fonction rationnelle, donc est bien dérivable sur son ensemble de définition, qui est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En particulier, la fonction $x \mapsto \frac{2-x}{1+x}$ est bien définie et dérivable sur $]-1, 2[$. De plus, $\forall x \in]-1, 2[$, $\frac{2-x}{1+x} > 0$, la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction f est bien dérivable par composition sur $]-1, 2[$. On a de plus,
$$\forall x \in]-1, 2[,\ f'(x) = \frac{-3}{2(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$$
Cherchons un majorant de $|f'(x)|$ sur $[1/2, 1]$. On a $\forall x \in]-1, 2[$, $|f'(x)| = \dfrac{3}{2(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$.
$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2} \leqslant x + 1 \leqslant 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{4}{9}$$
$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqslant 2 - x \leqslant \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{2-x} \leqslant 1$$
$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2} \leqslant x + 1 \leqslant 2$$

Par produit, on en déduit que pour tout $x \in [1/2, 1]$, $1 \leqslant \dfrac{1+x}{2-x} \leqslant 2$, soit $1 \leqslant \sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}} \leqslant \sqrt{2}$. Ainsi $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{9} \times \sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. On a donc $\boxed{\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = M}$.

2. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $u_n \in [1/2, 1]$".
   - $n = 0$. On a $u_0 = 1/2$, donc u_0 est défini et $u_0 \in [1/2, 1]$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc bien vérifiée.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. Alors $u_n \in [1/2, 1]$. Ainsi, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
     La fonction f étant bien définie et décroissante sur cet intervalle (sa dérivée est négative, comme nous l'avons calculé), on peut donc affirmer que déjà $f(u_n)$ existe bien, et même que :
     $$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right), \qquad \text{autrement dit} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
     Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$, on a donc bien
     $$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée également.
   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction f étant continue et strictement décroissante sur $]-1, 2]$, la fonction $x \mapsto -x$ étant également continue et strictement décroissante sur $]-1, 2]$, la fonction g est donc continue et strictement décroissante sur $]-1, 2]$. Elle réalise donc une bijection entre $]-1, 2]$ et $g(]-1, 2])$. Or, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \to -1} g(x) = +\infty$. Et par ailleurs, $g(2) = f(2) - 2 = 0 - 2 = -2$. Ainsi $g(]-1, 2]) = [-2, +\infty[$.
   Comme $0 \in [2, +\infty[$, on sait d'après le Théorème de la Bijection que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule unique solution dans $]-1, 2]$, qu'on notera ℓ ici.
4. La fonction f est dérivable sur $[1/2, 1]$, et on sait que $\forall x \in [1/2, 1]$, $|f'(x)| \leqslant M = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. D'après l'Inégalité des Accroissements Finis, on sait donc que
   $$\forall y, z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |f(y) - f(z)| \leqslant M|x - y|$$
   En particulier pour $y = u_n$ (pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque) et $z = \ell$, on obtient :
   $$|u_{n+1} - \ell| \leqslant M|u_n - \ell|$$
   Comme cette égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit facilement par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \ell| \leqslant M^n |u_0 - \ell|$$
5. Puisque $0 \leqslant M < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} M^n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} M^n |u_0 - \ell| = 0$. Ainsi, par encadrement on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = 0$, autrement dit la suite (u_n) converge vers ℓ.