03.1 Calculer le terme général des suites suivantes :

1. $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} = -2a_n$, $a_1 = 3$
2. $\forall n \geqslant 1$, $b_{n+1} = 2b_n + 3$, $b_1 = 10$
3. $\forall n \geqslant 0$, $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$, $u_0 = u_1 = 1$
4. $\forall n \geqslant 0$, $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$, $v_0 = v_1 = 1$

03.2 Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$.
2. Etudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) converge et calculer la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$.

03.3 On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
et les suites (v_n) et (w_n) définies par $\forall n \geqslant 1$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.

03.4 Déterminer les limites si elles existent des suites suivantes :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad v_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$$

$$x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}, \qquad y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

03.5 Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \qquad v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}, \qquad w_n = \ln(1+n^3)$$

$$x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}, \qquad y_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right)\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right)\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^5 - 1\right)}$$

03.6

1. Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(x+1) - x$. En déduire le signe de f.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n+1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$. La suite (u_n) est-elle monotone ? convergente ? si oui, préciser sa limite.

03.7 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$
2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge.

03.8 Soit f la fonction définie sur $]-1, 2]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-1, 2[$ et prouver qu'il existe un réel $M < 1$ tel que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant M$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$
3. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution ℓ dans $]-1, 2]$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant M^n \left|\ell - \frac{1}{2}\right|$
5. La suite (u_n) est-elle convergente ?