02.1 Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = ((2,1,-2),(3,1,-2),(0,1,-1))$.
2. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et
$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$
3. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2+2X+1, X+1, X^2+2)$.

1. On a $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $\mathcal{B}' = ((2,1,-2),(3,1,-2),(0,1,-1))$.
La matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ exprime les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$.
   - $(2,1,-2) = 2(1,0,0)+1(0,1,0)-2(0,0,1)$, donc $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ -2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
   - $(3,1,-2) = 3(1,0,0)+1(0,1,0)-2(0,0,1)$, donc $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot \\ -2 & -2 & \cdot \end{pmatrix}$
   - $(0,1,-1) = 0(1,0,0)+1(0,1,0)-1(0,0,1)$, donc $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   Donc on a obtenu
$$\boxed{P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

   Pour calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, il y a deux méthodes : soit on refait comme précédemment, on essaye d'exprimer chacun des vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}'$, soit on calcule l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

   1ère méthode :
   - On cherche $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que
$$(1,0,0) = a(2,1,-2)+b(3,1,-2)+c(0,1,-1) = (2a+3b, a+b+c, -2a-2b-c)$$
Il s'agit donc de résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2a+3b=1 \\ a+b+c=0 \\ -2a-2b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$
Ainsi, $(1,0,0) = -(2,1,-2)+1(3,1,-2)+0(0,1,-1)$. On a donc $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.
   - On cherche $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que
$$(0,1,0) = a(2,1,-2)+b(3,1,-2)+c(0,1,-1) = (2a+3b, a+b+c, -2a-2b-c)$$
Il s'agit donc de résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2a+3b=0 \\ a+b+c=1 \\ -2a-2b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$$

Ainsi, $(1,0,0) = -3(2,1,-2) + 2(3,1,-2) + 2(0,1,-1)$. On a donc $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \end{pmatrix}$.

- On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(0,0,1) = a(2,1,-2) + b(3,1,-2) + c(0,1,-1) = (2a+3b, a+b+c, -2a-2b-c)$$

Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2a+3b=0 \\ a+b+c=0 \\ -2a-2b-c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Ainsi, $(1,0,0) = -3(2,1,-2) + 2(3,1,-2) + 1(0,1,-1)$. On a donc $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $\boxed{P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2ème méthode :

On calcule l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ par les opérations de Gauss uniquement sur les lignes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 + 3L_2 \qquad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \longleftarrow -L_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

2. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

et la base $\mathcal{B}'$ est définie par :

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On exprime donc les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$ pour trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Pour trouver $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, on applique une des deux méthodes (systèmes, ou inverse) et on trouve :

$$\boxed{P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. On trouve :

$$\boxed{P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

02.2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes : $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

- $AX_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0X$. Puisque $X_1 \neq 0$, on en déduit que X_1 est bien un vecteur propre pour la matrice A, associé à la valeur propre 0.
- $AX_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$. Puisque $X_2 \neq 0$, on en déduit que X_2 est bien un vecteur propre pour la matrice A, associé à la valeur propre 1.
- $AX_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_3$. Puisque $X_3 \neq 0$, on en déduit que X_3 est bien un vecteur propre pour la matrice A, associé à la valeur propre 2.

$\boxed{\textbf{02.3}}$ Déterminer les valeurs propres ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés pour chacune des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de A.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque et considérons la matrice $A - \lambda I_3$. Cherchons tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

   On fait des opérations sur les lignes et les colonnes pour triangulariser afin de calculer le rang de cette matrice.

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - (5-\lambda)L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$

   Ainsi

$$A - \lambda I_3 \text{ non inversible } \iff (6-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

   Ainsi, les valeurs propres de A sont 2, 4 et 6 :

$$\boxed{Sp(A) = \{2, 4, 6\}}$$

   Puisque A possède trois valeurs propres distinctes et que A est de taille 3, on sait directement que A est diagonalisable.

   Cherchons une base des sous-espaces propres associés.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) \iff AX = 2X &\iff \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 5x + y - z &= 2x \\ 2x + 4y - 2z &= 2y \\ x - y + 3z &= 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x + y - z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
X \in E_4(A) \iff AX = 4X &\iff \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 5x + y - z &= 4x \\ 2x + 4y - 2z &= 4y \\ x - y + 3z &= 4z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x - z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} X \in E_6(A) \iff AX = 6X &\iff \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 5x + y - z &= 6x \\ 2x + 4y - 2z &= 6y \\ x - y + 3z &= 6z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y - z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ x - y - 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $E_6(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

On a donc

$$\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) + \dim(E_6(A)) = 3$$

Ainsi, la matrice A est bien diagonalisable et on a :

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut donc écrire :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de B.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque et considérons la matrice $B - \lambda I_3$. Cherchons tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $B - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

$$B - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 10 & 7 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \\ -2 & -8 & -6-\lambda \end{pmatrix}$$

   On fait des opérations sur les lignes et les colonnes pour triangulariser afin de calculer le rang de cette matrice.

$$\begin{aligned}
B-\lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 10 & 7 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \\ -2 & -8 & -6-\lambda \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -2 & -8 & -6-\lambda \\ 2-\lambda & 10 & 7 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} -2 & -8 & -6-\lambda \\ 0 & 4+8\lambda & 2+4\lambda+\lambda^2 \\ 0 & -2\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow 2L_2+(2-\lambda)L_1 \\ L_3 \longleftarrow 2L_3+L_1 \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} -2 & 4+2\lambda & -6-\lambda \\ 0 & -2\lambda^2 & 2-8\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad C_2 \longleftarrow C_2-2C_3
\end{aligned}$$

Ainsi

$$B-\lambda I_3 \text{ non inversible } \iff \lambda = 0$$

Ainsi, B possède exactement une seule valeur propre qui est 0.

$$\boxed{Sp(B) = \{0\}}$$

Puisque B possède une unique valeur propre, on peut tout de suite affirmer que B ne sera pas diagonalisable. En effet, si B était diagonalisable, il existerait une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$. Or, $B \neq 0$, cela n'est donc pas possible que B soit diagonalisable.

Cherchons une base du sous-espace propre associé à 0.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
X \in E_0(B) \iff BX = 0X \iff \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff &\left\{ \begin{array}{rl} 2x+10y+7z &= 0 \\ x+4y+3z &= 0 \\ -2x-8y-6z &= 0 \end{array} \right. \\
\iff &\left\{ \begin{array}{rl} z &= -2y \\ x &= 2y \end{array} \right. \\
\iff &X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$. On a donc

$$\dim(E_0(A)) \neq 3$$

Ainsi, la matrice B n'est pas diagonalisable, comme on l'avait affirmé précédemment.

02.4 Soit $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 12 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = 3M$.
Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

On peut réécrire $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui peut faciliter les calculs. On montre facilement la relation $M^2 = 3M$. On en déduit donc que

$$M^2 - 3M = 0$$

Ainsi, le polynôme $P(X) = X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de M.

Puisque $P(X) = X^2 - 3X = X(X-3)$, on sait que les valeurs propres possibles de la matrice M sont 0 et 3. Il nous faut donc vérifier si ce sont effectivement des valeurs propres ou non.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} MX = 0X &\iff \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff x + 3y + 2z = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -3y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

0 est effectivement bien une valeur propre et son sous-espace propre associé est de dimension 2.

$$\begin{aligned} MX = 3X &\iff \begin{cases} x + 3y + 2z = 3x \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{2}{3}z = 3y \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + z = 3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ x - 6y + 2z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2z \\ x = 3y \end{cases} \\ &\iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est également une valeur propre de M, et son sous-espace propre associé est de dimension 1.

Puisque

$$\dim(E_3(M)) + \dim(E_0(M)) = 3$$

on peut en déduire que la matrice M est bien diagonalisable.

02.5 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est triangulaire. On peut donc lire les valeurs propres sur la diagonale.
   Les valeurs propres de A sont donc 1, 2, 3. Puisque A possède trois valeurs propres distinctes et est de taille 3, on sait donc que la matrice A est diagonalisable.
   De plus, 0 n'est pas une valeur propre, donc la matrice A est bien inversible.
2. La matrice B est triangulaire. On peut donc lire les valeurs propres sur la diagonale.
   Les valeurs propres de B sont donc 0, 1, 2. Puisque B possède trois valeurs propres distinctes et est de taille 3, on sait donc que la matrice B est diagonalisable.
   De plus, 0 est valeur propre, donc la matrice B n'est pas inversible.
3. La matrice C est triangulaire. On peut donc lire les valeurs propres sur la diagonale.
   Les valeurs propres de C sont donc 1, 2, 3. Puisque C possède trois valeurs propres distinctes et est de taille 3, on sait donc que la matrice C est diagonalisable.
   De plus, 0 n'est pas une valeur propre, donc la matrice C est bien inversible.

02.6 Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\lambda \\ 3-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 2-3\lambda+\lambda^2 \\ -1 & 2-\lambda & -2+\lambda \end{pmatrix} \quad C_3 \longleftrightarrow 2C_3 - \lambda C_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 2-3\lambda+\lambda^2 & 0 \\ -1 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad C_2 \longleftrightarrow C_3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$(A - \lambda I_3) \text{ non inversible} \Longleftrightarrow (2-3\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ \lambda = 1 \end{array} \right.$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2.

$$AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -2x \\ y = -x \end{array} \right. \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{l} z = x \end{array} \right. \iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Comme $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 1 + 2 = 3$, la matrice A est diagonalisable.

On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. En calculant en plus P^{-1}, on en déduit que

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} B - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ 2-\lambda & -1 & -2 \end{pmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4-5\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (2-\lambda)L_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 10 & 2-3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$(B - \lambda I_3) \text{ non inversible} \iff (1-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ \lambda = 1 \end{array} \right.$$

Les valeurs propres de B sont donc 1 et 2.

$$BX = X \iff \left\{ \begin{array}{l} x - y - 2z = 0 \end{array} \right. \iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$BX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -2z \\ x = -z \end{array} \right. \iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Comme $\dim(E_1(B)) + \dim(E_2(B)) = 1 + 2 = 3$, la matrice B est diagonalisable.

On peut donc écrire $B = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. En calculant en plus P^{-1}, on en déduit que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque C est triangulaire, on lit directement les valeurs propres de C sur la diagonale. C a donc 2 valeurs propres distinctes 0 et 1 et est de taille 2, donc on est sûr que C est diagonalisable.

$$CX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \end{array} \right. \iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$CX = 1X \Longleftrightarrow \left\{ \; y = x \quad \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right.$$

Ainsi, on peut écrire $C = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$. En calculant P^{-1}, on déduit que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Réponses :
   D a trois valeurs propres : 0, 1 et -4.
   Puisque D possède trois valeurs propres différentes, D est diagonalisable.
   On résout :

$$DX = 0 \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$DX = X \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$DX = -4X \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   Ainsi, on peut écrire $D = PMP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$. En calculant P^{-1}, on écrit :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $E = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On trouve deux valeurs propres -1 et 2.
   On ne peut pas encore dire si E est diagonalisable.

$$EX = -X \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$EX = 2X \Longleftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   Comme $\dim(E_{-1}(E)) + \dim(E_2(E)) = 2 + 1 = 3$, la matrice E est diagonalisable. Ainsi, on peut écrire $E = PMP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. En calculant P^{-1}, on écrit :

$$E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   F est triangulaire, donc on lit directement les valeurs propres sur la diagonale : F ne possède donc qu'une seule valeur propre qui est 0.
   F ne peut alors pas être diagonalisable. Car si F était diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible telle que $F = P \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$. Or, $F \neq 0$, donc il n'est pas possible que F soit diagonalisable.

02.7

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.
2. Déterminer le terme général des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On calcule les valeurs propres : on trouve deux valeurs propres 1 et 4. Puisque A possède deux valeurs propres distinctes, on sait donc que A est diagonalisable. On calcule les sous-espaces propres :
$$AX = X \iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$AX = 4X \iff X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
   On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On en déduit, après le calcul de P^{-1} est :
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors, le système donné dans l'énoncé se traduit par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$
   avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit donc par une récurrence immédiate que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$$
   Il nous faut donc calculer les puissances de la matrice A.
   Or, d'après la question A, on sait que $A = PDP^{-1}$, donc par une récurrence immédiate,
$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -2+2\times 4^n \\ -1+4^n & 1+2\times 4^n \end{pmatrix}$$
   On en déduit donc que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$$

autrement dit
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -2+2\times 4^n \\ -1+4^n & 1+2\times 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}\left(2+4^n-2+2\times 4^n\right) = 4^n}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3}\left(-1+4^n+1+2\times 4^n\right) = \frac{1}{3}+4^n}$$

02.8 Soit $a \in \mathbb{R}$. On note u_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (u_a(P))(X) = \frac{1}{2}P(X) + aX\int_0^1 P(t)dt.$$

1. Pour quelles valeurs de a u_a est-il un automorphisme ? Pour les valeurs trouvées, déterminer l'endomorphisme u_a^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de u_a et les sous-espaces propres associés. u_a est-il diagonalisable ?

1. Déterminons la matrice de u_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
$(u_a(1))(X) = \frac{1}{2} + aX\int_0^1 1dt = \frac{1}{2} + aX$
$(u_a(X))(X) = \frac{1}{2}X + aX\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}X + \frac{a}{2}X = \frac{1+a}{2}X$
$(u_a(X^2))(X) = \frac{1}{2}X^2 + aX\int_0^1 t^2dt = \frac{1}{2}X^2 + \frac{a}{3}X$
$\dots$
$(u_a(X^k))(X) = \frac{1}{2}X^k + aX\int_0^1 t^kdt = \frac{1}{2}X^k + \frac{a}{k+1}X$
On en déduit que la matrice de u_a dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & & & & & \\ a & (1+a)/2 & a/3 & a/4 & \cdots & a/(n+1) \\ & & 1/2 & & & \\ & & & 1/2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1/2 & & & & & \\ 0 & (1+a)/2 & a/3 & a/4 & \cdots & a/(n+1) \\ & & 1/2 & & & \\ & & & 1/2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1/2 \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2aL_1$$
La matrice A est donc inversible si et seulement si $1+a \neq 0$, c'est-à-dire si $a \neq -1$.
L'endomorphisme u_A est donc un automorphisme dès qu'on a $a \neq -1$.
Continuons les opérations élémentaires sur les lignes uniquement pour transformer A en I_{n+1}.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1/2 & & & & & \\ 0 & (1+a)/2 & & & & \\ & & 1/2 & & & \\ & & & 1/2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1/2 \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2a}{k} L_k$$

$$\sim I_{n+1} \quad \begin{array}{l} \forall i \neq 2,\ L_i \longleftarrow 2L_i \\ L_2 \longleftarrow \frac{2}{1+a} L_2 \end{array}$$

On refait les mêmes opérations sur I_{n+1} pour obtenir la matrice de u_a^{-1}, on obtient alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ \frac{-4a}{1+a} & \frac{2}{1+a} & \frac{-4a}{3(1+a)} & \frac{-4a}{4(1+a)} & & \frac{-4a}{(n+1)(1+a)} \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, en traduisant en polynômes :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi^{-1}(P)(X) = 2P(X) - \frac{4a}{1+a} X \int_0^1 P(t)dt}$$

2. On cherche un λ tel qu'il existerait un polynôme P non nul vérifiant $u_a(P) = \lambda P$.
Si un tel couple (λ, P) existe, on a alors

$$\frac{1}{2} P(X) + aX \int_0^1 P(t)dt = \lambda P(X)$$

autrement dit

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) P(X) = \left(-a \int_0^1 P(t)dt\right) X \qquad (1)$$

1er cas : $\lambda = 1/2$, alors tout polynôme P non nul vérifiant $\int_0^1 P(t)dt = 0$ vérifie bien la relation (1) et sera alors un vecteur propre pour $1/2$. Ainsi $1/2$ est bien une valeur propre de u_a.
2ème cas : si $\lambda \neq -1/2$, alors

$$P(X) = -\left(\frac{a}{1/2 - \lambda} \int_0^1 P(t)\right) X$$

Puisqu'on cherche un polynôme non nul, on doit avoir nécessairement $P(X)$ de degré 1, colinéaire à X. On aurait donc $P(X) \in Vect(X)$.
Or, $u_a(X) = \frac{(1+a)}{2} X$, donc la seule valeur propre possible est donc $\lambda = \frac{1+a}{2}$.
En résumé, les valeurs propres de u_a sont donc

$$Sp(u_a) = \{\frac{1}{2}, \quad \frac{1+a}{2}\}$$

L'endomorphisme est-il diagonalisable ?
Si $a = 0$, on a une unique valeur propre, et on a directement $u_a = \frac{1}{2} Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc u_a est bien diagonalisable.
Si $a \neq 0$, déterminons les sous-espaces propres pour savoir si u_a est diagonalisable ou non.

On a déjà montré que si $\lambda \neq 1/2$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1+a}{2}$, les vecteurs propres étaient nécessairement colinéaires à X. On a donc que le sous-espace propre associé à $\frac{1+a}{2}$ est $Vect(X)$ de dimension 1.
Déterminons alors tous les vecteurs propres pour la valeur propre $\lambda = 1/2$.

$$u_a(P) = \frac{1}{2}P \Longleftrightarrow a\left(\int_0^1 P(t)dt\right)X = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 P(t)dt = 0$$

Si on note $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\int_0^1 P(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0$. Alors

$$\int_0^1 P(t)dt = 0 \Longleftrightarrow a_0 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}$$

et ainsi

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(X^k - \frac{1}{k+1}\right)$$

Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre $1/2$ est donc $Vect\left(X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{3}, X^3 - \frac{1}{4}, \ldots, X^n - \frac{1}{n+1}\right)$ qui est de dimension n.
Comme $\dim(E_{1/2}(u_a)) + \dim(E_{(1+a)/2}(u_a)) = n+1$, on a donc bien que u_a est diagonalisable.

02.9 Soit $n \geqslant 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ. φ est-elle diagonalisable ?

1. φ est linéaire, en effet pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\lambda P + Q) = 2X(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q)'' = \lambda(2XP' - P'') + (2XQ' - Q'') = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

De plus, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on sait que $\deg(P') \leqslant n-1$, donc $\deg(XP') \leqslant n$ et $\deg(P'') \leqslant n-2$. Ainsi

$$\deg(\varphi(P)) \leqslant \max(\deg(XP'), \deg(P'')) \leqslant \max(n-2, n) \leqslant n$$

Ainsi, on a bien pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Remarquons qu'on a même montré que si $P \in \mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_k[X]$ également.

2. Ecrivons la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
$\varphi(1) = 0$ $\varphi(X) = 2X$ $\varphi(X^2) = 4X^2 - 2$ $\varphi(X^3) = 6X^3 - 6X$ $\varphi(X^4) = 8X^4 - 12X^3$ $\ldots \varphi(X^n) = 2nX^n - n(n-1)X^{n-2}$
Donc

$$mat(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & (*) \\ & 2 & & & & & \\ & & 4 & & & & \\ & & & 6 & & & \\ & & & & 8 & & \\ & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & 2n \end{pmatrix}$$

La matrice est en effet bien triangulaire car on a montré que $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On lit donc directement les valeurs propres de φ sur la diagonale de la matrice : les valeurs propres sont donc $0, 2, 4, 6, \ldots, 2n$. Il y a exactement $n+1$ valeurs propres distinctes pour φ. Puisque la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est également égale à $n+1$, on sait donc directement que l'endomorphisme φ est diagonalisable.