01.1 1. Montrer que $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /2x+y-z=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base et la dimension.
2. Montrer que que $E=\{P\in\mathbb{C}_n[X]\ /\ P(1)=P'(1)=0\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et en déterminer une base.
3. Montrer que $E=\{f\in\mathcal{C}^0([0,1])\ /\ \int_0^1 f(t)dt=0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

01.2 Soient les applications $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x,x+y)\end{array}$ et $g:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,2x-y+3z)\end{array}$.
Démontrer que f et g sont des applications linéaires.
Déterminer leur noyau, leur image, leur rang.
Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Déterminer leur matrice dans les bases canoniques.

01.3 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de A. Qu'en déduire ?
2. Calculer $(A-I)(A+3I)$. En déduire A^{-1}.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $(u_n,v_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que $A^n=u_nA+v_nI$.
4. Calculer pour $n\in\mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.
   En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n, puis A^n.

01.4 Soit $f:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P)=P-P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.
3. Soit $Q=2X^4-4X^3+3X^2+X-6$. Trouver l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ tel que $f(P)=Q$.

01.5 Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes. Si ce n'est pas possible, déterminer le rang des matrices.

$$A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\0&1&1&1\\-1&1&1&2\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&1&-2&1\\-1&3&-1&1\\3&-1&1&3\\1&2&-3&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&0&1&-1\\0&-1&2&0\\2&-1&0&2\end{pmatrix}$$

01.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :
1. $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)\iff \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$
2. $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f^2)\iff E=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)$

01.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2-5f+6Id=0$.
Montrer que $E=\mathrm{Ker}(f-3Id_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-2Id_E)$.

01.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ non nul vérifiant $f^2=0$.

1. Déterminer le rang de f et la dimension de son noyau.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

01.9 Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1. Vérifier que $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$. En déduire une CNS pour que A soit inversible, et calculer A^{-1} dans ce cas.
2. En déduire que tout puissance n-ième de A peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I et A.