$\boxed{\textbf{05.1}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{05.2}}$ Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de M et I_4.
2. En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.
3. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = a_n M + b_n I_4$$

4. En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{05.3}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire la division euclidienne de X^k par le polynôme $X^2 - X - 2$. En déduire l'expression de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{05.4}}$ Pour chacune des matrices suivantes, déterminer leur image, leur noyau et leur rang (dans l'ordre de votre choix).

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{05.5}}$ Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

$\boxed{\textbf{05.6}}$ Déterminer les éléments propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ?

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{05.7}}$ Diagonaliser si possible les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{05.8}}$ Soit A la matrice de l'exercice $\boxed{05.3}$. Déterminer $Sp(A)$.

$\boxed{\textbf{05.9}}$ Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$. Déterminer à quelle condition la matrice A est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{05.10}}$ Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = -2$, $u_3 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

1. En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A, et en déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$