04.23 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Y] = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

04.24 Soit n un entier naturel non nul. Soit X une variable suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose $Y = (1+X)^2$. Calculer $cov(X,Y)$.

04.25 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, et suivant la même loi géométrique de même paramètre p. Calculer $cov(X+Y, X-Y)$.

04.26 Le nombre de visiteurs quotidiens à Disneyland Paris suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque visiteur a une probabilité p d'avoir payé son entrée (et $1-p$ d'avoir été invité ou d'avoir fraudé), ceci indépendamment des autres visiteurs.

On désigne par X le nombre de visiteurs en une journée et Y le nombre de visiteurs ayant payé leur entrée durant cette journée.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$
2. En déduire la loi conjointe de X et Y, puis la loi de Y.
3. Que vaut l'espérance et la variance de Y ?

04.27 On sac contient N jetons indiscernables au toucher ($N \geqslant 2$) tels que $N-2$ sont blancs et 2 sont noirs. On tire successivement et sans remise les N jetons. On note X_1 (resp. X_2) la VAR égale au numéro du tirage qui a donné pour la première fois (resp. pour la deuxième fois) un jeton noir.

1. Déterminer la loi conjointe de X_1 et X_2.
2. En déduire les lois de X_1 et X_2. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?
3. Démontrer que $N+1-X_2$ suit la même loi que X_1.
4. Déterminer la loi de $X_2 - X_1$ et la comparer avec celle de X_1.
5. Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}(X_2)$. Montrer que $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2)$.
6. Montrer que $2cov(X_1, X_2) = V(X_1)$. En déduire $cov(X_1, X_2)$.

04.28 Soit $n \geqslant 4$ et $p \in]0,1[$. On effectue n lancers d'une pièce avec laquelle la probabilité d'obtenir Pile est p. On note :

- pour $i \in [\![1,n]\!]$, X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le lancer numéro i amène PIle et 0 sinon,
- pour $i \in [\![1,n-1]\!]$, Z_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le lancer numéro i et le lancer numéro $i+1$ amènent Pile et 0 sinon,
- T_2 la variable aléatoire égale au nombre de fois où un Pile a été suivi d'un autre Pile au cours des n lancers.

1. Donner la loi de Z_i, son espérance et sa variance.
2. Pour $i, j \in [\![1,n-1]\!]$, calculer $cov(Z_i, Z_j)$
3. Déterminer l'espérance et la variance de T_2.

04.29 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et on note $S = \sum_{k=1}^{n-1} X_k X_{k+1}$. Déterminer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

04.30 Soient X et Y deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

Déterminer a et les lois de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

04.31 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules supplémentaires de la couleur tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On définit pour $i \in [\![1,n]\!]$) $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ième tirage, et $X_i = 0$ sinon. On définit enfin pour $p \in [\![2,n]\!]$, $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance de X_2.
3. Donner la loi de Z_2.
4. Soit $p \leqslant n-1$. Déterminer pour $k \in Z_p(\Omega), \mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \,|\, Z_p = k)$.
5. Montrer que pour $p \leqslant n-1$: $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + c\mathbb{E}[Z_p]}{2 + pc}$.
6. En déduire par récurrence forte que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$.