04.1 On lance deux dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus. Déterminer la loi de X.

04.2 On retourne une à une les cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X le rang d'obtention du premier as. Déterminer la loi de X et son espérance.

04.3 Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ définit une loi de probabilité.

04.4 Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(X \geqslant n)$.
Déterminer la loi de X.

04.5 On considère une urne contenant une proportion p ($p \in]0, 1[$) de boules blanches, et $1-p$ de boules noires. On effectue une série de tirages avec remise. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir la seconde boule blanche.

1. Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire T.
3. Calculer, si elle existe, $\mathbb{E}[T]$.

04.6 Une urne contient n boules dont b blanches et $r = n - b$ rouges. Un joueur effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne, jusqu'à l'obtention de j boules blanches.
Notons X_j la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages effectués. On admet que X_j est bien une variable aléatoire.

1. Déterminer la loi de X_j.
2. En déduire que : $\forall q \in [0, 1[,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k-1}{j-1} q^{k-j} = \frac{1}{(1-q)^j}$.

04.7 Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) + (n+1)\mathbb{P}(X > n)$$
2. En déduire que si $\sum \mathbb{P}(X > k)$ converge, alors :
$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$
En déduire que X admet une espérance.
3. On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\sum \mathbb{P}(X > k)$ converge et que sa somme vaut $\mathbb{E}[X]$.

04.8 On joue à Pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir Face est égale à $\dfrac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la VAR égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![1, 5]\!]$.
2. Mont.que $\forall n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{2}{9}\mathbb{P}(X = n-2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X = n-1)$.
3. En déduire la loi de X et son espérance.

04.9 Deux personnes A et B partent en vacances de manière indépendante dans un même lieu L.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Les jours d'arrivée possibles de chacun d'eux sont numérotés de 1 à $n-2$.

Ces deux amis choisissent chacun leur jour d'arrivée au hasard, puis restent alors trois jours dans ce lieu à attendre l'autre puis repartent. Les séjours possibles se situent donc au cours de la période comportant les jours numérotés de 1 à n.

Toutes les arrivées se font le matin et les départs le soir.

On note X le numéro du jour d'arrivée de A et Y celui de B.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Déterminer la probabilité que les voyageurs arrivent le même jour.
3. Quelle est la probabilité que A arrive avant B ?
4. Déterminer la probabilité que A et B arrivent avec un jour d'écart.
5. Déterminer la probabilité que les voyageurs puissent se rencontrer.