03.1 On lance un dé cubique à plusieurs reprises.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $S_i =$ "le i-ième lancer donne un 6". De même, on note pour tout i, $A_i =$ "textle i-ième lancer donne un 1".

1. Ecrire à l'aide des événements S_i et $\overline{S_i}$ l'événement $A =$ "la première apparition du 6 a lieu strictement après le troisième lancer".
2. Est-ce le même événement que $B =$ "le 6 n'apparaît pas au cours des 3 premiers lancers" ?
3. Est-ce le même événement que $D = \bigcup_{i \geqslant 4} S_i$?
4. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :
$E_1 = \bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i, \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=4}^{+\infty} A_i\right), \quad E_3 = \bigcup_{i>3} A_i.$

03.2

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $p_n = \dfrac{an(n+1)}{2^n}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la suite (p_n) définit-elle une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
2. Même question avec $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \begin{cases} \dfrac{a}{n!} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. Même question avec $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{a}{(2n)!}$

03.3 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanche supplémentaire, et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue.

1. On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

03.4 On considère le jeu palpitant suivant : on lance trois pièces équilibrées, si les trois pièces donnent Pile le jeu s'arrête, sinon on recommence.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête exactement au n-ième lancer. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Calculer la probabilité qu'au n-ième lancer, le jeu ne se soit pas encore arrêté. En déduire à nouveau que le jeu s'arrête presque sûrement.

03.5 Agnès et Benoît lancent un dé à tour de rôle et Agnès commence. Les lancers sont indépendants. Le gagnant est le premier à obetnir un "6". Quand Agnès ou Benoît gagne, la partie s'arrête.
On s'intéresse aux trois événements suivants : $A =$ "victoire d'Agnès", $B =$ "victoire de Benoît" et $D =$ "pas de vainqueur". On note F_n : "fin de la partie au n-ième lancer" et S_j : "le j-ième lancer donne un 6".

1. En exprimant D à l'aide des S_j, déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.
2. Exprimer F_n à l'aide des S_j et en déduire la probabilité de F_n.
3. Exprimer les événements A et B à l'aides événements F_n.
4. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

03.6 On admettra que pour tout $x \in]-1, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge, et $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Soit $p \in]0, 2/3[$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est $\dfrac{1}{2}p^n$ (pour $n \geqslant 1$). Par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est $\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un enfant. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants : calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit un entier $k \geqslant 1$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

03.7 Soit $p \in]0, 1[$. Une personne effectue une suite de lancers d'une pièce qui fait Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $q = 1-p$. La personne gagne si elle obtient à un moment deux Pile de plus que de Face, la personne perd si elle obtient à un moment deux Face de plus que de Pile.

1. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité qu'en $2n$ coups, la personne n'a ni gagné, ni perdu, et qu'à l'issue du $2n$-ième lancer, elle a obtenu autant de Pile que de Face.
2. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins $2n+1$ lancers.
3. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité de gagner au $(2n)$-ème lancer.
4. Calculer la probabilité que la personne gagne.