02.1 Vérifier si les séries suivantes convergent, et le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^2-4}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3+5n^2+4n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n+1}{n+4}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$

02.2 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \in [0,1[$. Montrer que la série de terme général u_n converge.
3. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{n^n}$

02.3 On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. A l'aide de développements limités, déterminer un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que la série de terme général v_n converge.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

02.4 On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leur convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

02.5 Soit x un réel fixé. On note $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Justifier que A et B existent.
2. Calculer $A+B$ et $A-B$. En déduire les valeurs de A et B.

02.6

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$ pour $k \geqslant 1$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de I_n.
3. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$.
4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

02.7 Soient a et b deux réels et (u_n) une suite vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On suppose que l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux racines réelles comprises dans $]-1,1[$.

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de a, b, u_0 et u_1.

02.8

1. Soit $x \in [0,1[$ un réel et soit k un entier naturel fixé. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ converge. On note alors $s_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
2. Calculer $s_0(x)$ et $s_1(x)$.
3. A l'aide de la formule de Pascal, montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$$
4. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$