01.1 Calculer le terme général des suites (u_n) suivantes :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{7}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$
3. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{2}{9}u_n$
5. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2$
   (On commencera par chercher une suite constante c qui convient, et considérer ensuite $v_n = u_n - c$)

01.2 Soit pour tout entier n, f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Pour tout entier n, Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, qui appartient à $]0, 1]$. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
3. En déduire que (x_n) converge vers 0.
4. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $x_n > \frac{1}{n}$.
5. Etudier le signe de $x - \ln(x)$ et en déduire que $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

01.3 Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{1 + nt_n^2}$.

1. Etudier la monotonie de la suite (t_n).
2. Montrer que (t_n) converge et déterminer sa limite.

01.4 Soit (u_n) telle que $u_0 \geqslant 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$.
3. En déduire la limite de (u_n).

01.5 Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer que (u_n) est croissante et minorée par 1.
   (b) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$. En déduire que $u_n - u_0 \geqslant \frac{n}{u_{n-1}}$.
   (d) Montrer que $u_{n-1} = o(n)$, puis que $u_n = o(n)$.
2. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leqslant u_{k+1}^2 - u_k^2 \leqslant 2 + u_{k+1} - u_k$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n + 1 \leqslant u_n^2 \leqslant 2n + u_n$
   (c) En déduire un équivalent de u_n.

01.6 On souhaite montrer que la suite $(\sin(n))$ n'admet pas de limite. Supposons par l'absurde que $(\sin(n))$ converge vers un réel ℓ.

1. Justifier que $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ converge vers ℓ.
2. Calculer $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ et en déduire que (S'_n) est bornée.
3. Montrer que $\ell = 0$.
4. Montrer que $\sin(n + 1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$. En déduire que $(\cos(n))$ converge vers 0 et conclure.

01.7 Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers un réel ℓ. En vous inspirant de la démonstration de Cesàro, montrer que : $v_n = \displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$ -0.15cm converge également vers ℓ.

01.8 On pose (u_n) telle que $u_0 \in]0, 1[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 - u_n)u_n$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   Montrer que (v_n) converge vers 1.
3. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.
4. En appliquant le théorème de Cesàro, trouver un équivalent simple de u_{n+1}. En déduire un équivalent de u_n.

01.9 Etudier les convergences des suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad w_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}, \quad y_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}, \quad z_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$$