02.1 Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x-y+t=0 \text{ et } x+y-z+t=0\}$. Justifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.

02.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

02.3 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$. Montrer que $\text{Ker}(f - Id_E)$ et $\text{Ker}(f - 2Id_E)$ sont supplémentaires.

02.4 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

02.5 Soit E ev de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit f l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, et montrer qu'ils sont supplémentaires.

02.6 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note $\forall M \in E$, $f(M) = AM$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et donner une base de son noyau et son image.

02.7 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E ev de dimension finie. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est f-stable si $f(F) \subset F$

1. Soit x un vecteur propre de f. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par x est stable par f.
2. Enoncer et démontrer une réciproque.

02.8 Soient a, b deux réels distincts. On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_2 = ((X-a)^3, (X-b)^3, X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$. Quelles sont les coordonnées de Q dans $\mathcal{B}_2$?
3. Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$, puis de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_1$.

02.9 E est supposé de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \neq 0$ tel que $f^2 = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces de E stables par f.

1. Déterminer $\text{rg}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f))$.
2. Soit D une droite de E. Montrer que $D \in \mathcal{S} \iff D \subset \text{Ker}(f)$.
3. Soit P un plan de E. Montrer que $P \in \mathcal{S} \iff \text{Im}(f) \subset P$.
4. Déterminer $\mathcal{S}$.

02.10 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire le calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

02.11 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base d'un $\mathbb{R}$-ev E, et f, g les endomorphismes de E ayant pour matrices A et B dans la base $\mathcal{B}$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de g.
2. Calculer $(A - I_3)^2$. f est-il diagonalisable ? Montrer que les vecteurs propres de g sont des vecteurs propres de f.
3. Trouver une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

02.12 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E.
On suppose que f a n valeurs propres distinctes.

1. Que peut-on dire des sous-espaces propres de f ?
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f (resp. g) sont stables par g (resp. f). Que peut-on en déduire pour g ?

02.13 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $n \geqslant 1$. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^n = A$. Montrer que B commute avec A. En déduire que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de B. En déduire finalement les possibilités pour la matrice B.

02.14 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) tel que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$ et tel que $f^3 + f = 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. On suppose $f \neq 0$. Montrer que tout élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$ est vecteur propre de f. Conclure.

02.15 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, \ldots, f(e_{n-1}) = e_n, f(e_n) = e_1$.

1. Montrer que f est bijectif. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice de f^{-1}.
2. Déterminer f^n. En déduire les valeurs propres possibles de f.
3. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f.

02.16 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et tel que $f^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $e_1 \in E$ tel que $f^{n-1}(e_1) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1))$ est une base de E et donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. Donner les valeurs propres et les espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

02.17 Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 5 et soit $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(e_1) = e_4, f(e_2) = e_5, f(e_3) = e_2, f(e_4) = e_1, f(e_5) = e_3$.

1. Soit $G = Vect(e_1, e_4)$ et soit $H = Vect(e_2, e_3, e_5)$. Montrer que G et H sont stables par f.
2. On note g la restriction de f à G et h la restriction de f à H. Montrer que g est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $h^3 = Id$. Montrer que 1 est une valeur propre de h et déterminer son espace propre associé. Déterminer $Sp(h)$.
4. En déduire les éléments propres de f.

02.18 Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 2f + Id_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et déterminer $Sp(f)$.
2. A quelles conditions f est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $\dim(f - Id_E) \geqslant \dfrac{n}{2}$.
4. On suppose à présent que $\dim(\mathrm{Ker}(f - Id_E)) = n - 1$.
   (a) Soit $e_1 \in \mathrm{Im}(u - Id_E) \setminus \{0\}$. Justifier qu'il existe $n - 1$ vecteurs $e_2, \ldots, e_n$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ base de $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et $f(e_n) = e_1 + e_n$.
   (b) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E et donner la matrice de f dans cette base.
   (c) On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ f \circ g = g \circ f\}$. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension en fonction de n.