$\boxed{\textbf{01.7}}$ On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}dt$.

1. Justifier que h est une fonction définie, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$, et étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{01.8}}$ En posant $x = \sqrt{e^t+1}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^t+1}}dt$.

$\boxed{\textbf{01.9}}$ 1. Soit α un réel, $\alpha \in]0,1[$. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

2. Soit α un réel, $\alpha > 1$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

$\boxed{\textbf{01.10}}$ Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 t^n f(t)dt\right) = 0$.

$\boxed{\textbf{01.11}}$ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right) = 0$.

$\boxed{\textbf{01.12}}$ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(t)dt$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}dt$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$

$\boxed{\textbf{01.13}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ existe. A l'aide d'une intégration par parties, calculer alors I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{01.14}}$ Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ (on posera $u = \sqrt{1-t}$).

$\boxed{\textbf{01.15}}$ Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^4)^3}dt$ (on posera $u = t^4$).

$\boxed{\textbf{01.16}}$ 1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt$ converge.

2. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$.
3. En déduire la valeur de I.

$\boxed{\textbf{01.17}}$ Pour $n \geqslant 1$, on pose, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dt$

1. Montrer que la suite (I_n) converge.
2. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. Calculer I_1, puis montrer que $I_n = \dfrac{(2n-2)! \times \pi}{2^{2n-2}\times((n-1)!)^2}$.

$\boxed{\textbf{01.18}}$ 1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in [0,\sqrt{n}]$, on a :

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{-t^2}{n} \leqslant -\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$$

2. En déduire que pour $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

3. On pose pour $n \geqslant 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$
   (a) Calculer I_0 et I_1. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n pour $n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que (I_n) est décroissante et converge.
   (c) Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
   (d) Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{} I_{n-1}$.
   (e) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. En effectuant respectivement des changements de variables $t = \sqrt{n}\cos(u)$ et $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}I_{2n+1}, \quad \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}I_{2n-2}$$

5. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et donner sa valeur.