01.1 Montrer que la série de terme général u_n converge et déterminer sa somme pour :

1. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{3^n}$
3. $u_n = 1-(1-q^n)^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0,1[$

01.2 Etudier la nature de la série de terme général u_n pour :

1. $u_n = \ln\left(\dfrac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}\right)$
2. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n\cos(n)}{n\sqrt{n}}$

01.3 Soit (u_n) une suite de réels.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge $\iff (u_n)$ converge.

Appl. : Montrer que la suite définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

01.4 Soit x un réel tel que $-1 \leqslant x < 1$.

1. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1,x]$, $\displaystyle\left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left|-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

   En particulier, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

01.5 On définit pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \geqslant 0$, $g_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la fonction g_n admet un maximum, noté M_n, que l'on calculera.
2. On note pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{n}M_n$.
   On note également pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
   Ecrire un Développement Limité de a_n à l'ordre 2 lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel strictement positif.
5. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} M_n$.

01.6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on pose pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

1. On suppose que $\alpha < 0$. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
2. On suppose que $0 \leqslant \alpha < 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$.

   En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.
3. Soit $\alpha > 1$. En comparant avec une série de Riemann, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
4. On suppose à présent que $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :
   $$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$
   (b) On note pour $n \geqslant 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$.
   A l'aide du (a), montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1))$.
   (c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$