06.1 On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et $\mathbb{E}[Y]$.

06.2 Le nombre de visiteurs quotidiens à Disneyland Paris© suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque visiteur entre dans le parc par une des m entrées $E_1, \ldots, E_m$, qu'il choisit de manière équiprobable et indépendamment des autres visiteurs.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
2. On désigne par N le nombre de visiteurs en une journée et X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 durant cette journée.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[N = n]$.
   (b) En déduire la loi conjointe de N et X_1, puis la loi de X_1.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de X_1.
3. Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par E_1 par jour.

06.3 Soit X une VAR discrète dont la loi est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. On note Y la variable définie par $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

06.4 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité pour que la matrice A soit diagonalisable.

06.5 Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Y] = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

06.6 Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes mutuellement. On note pour tout $i \geqslant 0$, $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.

06.7 Soient X et Y des variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\alpha}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes.
3. Dterminer $\text{cov}(X, Y)$.

06.8 On joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$ de la façon suivante :

- On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. On note N la VAR égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois Pile, alors on relance n fois la pièce. On appelle alors X le nombre de Pile obtenu au cours de ces n lancers.

On admettra que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

1. Déterminer la loi de N.
2. Pour $n \geqslant 1$, déterminer la loi conditionnelle à $[N=n]$ de X.
3. En déduire la loi de X.
4. On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire BG.
   (b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.
   (c) En déduire $\mathbb{E}[X]$.

06.9 Un sac contient n jetons numérotées de 1 à n.

On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac. Soient X le premier numéro tiré, et Y le deuxième numéro tiré.

1. Déterminer la covariance $\text{cov}(X,Y)$ de X et de Y.
2. On pose $Z = |Y-X|$. Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance.

06.10 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

On considère les variables aléatoire $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par $X_1 = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ième tirage, et $X_i = 0$ sinon.

On définit alors pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et $\mathbb{E}[X_1]$.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis $\mathbb{E}[X_2]$.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $Z_p(\Omega)$.
   (b) Déterminer pour $k \in Z_p(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \,|\, Z_p = k)$
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
   $$\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}$$
   (d) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.