05.1 On considère un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face "k" soit proportionnelle à k, avec pour coefficient de proportionnalité le réel α.
On lance une fois le dé et on note X le numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X en fonction de α.
2. Déterminer la valeur de α.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $\mathbb{E}[Y]$.

05.2 Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne.
On appelle X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}[X]$.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

05.3 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs de boules dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.
On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 et de X_2.
2. Conjecturer la loi de X_n et démontrer le résultat par récurrence.

05.4 Les copies de Noëlle ont toutes une probabilité 1/5 d'être rendues de manière anonyme (indépendamment les unes des autres).
Si Noëlle rend n copies de devoirs dans l'année, à partir de quelle valeur de n aura-t-on en moyenne au moins une copie anonyme ?

05.5 Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui.
On note X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager deux cas : avec ou sans remise)
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour, 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour-là ?

05.6 Pour un sondage, une équipe de télévision se rend dans un lycée contenant N étudiants. Parmi ces N lycéens, une proportion p est constituée de majeurs (cela représente donc Np élèves, les $N(1-p)$ autres étant mineurs). Ne pouvant interroger tout le monde, l'équipe de télévision se résout à interroger seulement n étudiants différents, choisis au hasard au sein du lycée.
On note X le nombre d'étudiants majeurs finalement interrogés pour le sondage. Déterminer la loi de X.

05.7 On joue à Pile ou Face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir Face est égale à $\dfrac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la VAR égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![1, 5]\!]$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{2}{9}\mathbb{P}(X = n-2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X = n-1)$$
(on pourra étudier selon le résultat du premier lancer).
3. En déduire la loi de X.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

05.8 Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Montrer que $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer.
Faire de même si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$.

05.9 Une copie d'étudiant de B/L contient un nombre de questions parfaitement rédigées suivant une variable de Poisson $\mathcal{P}(3)$.

1. Au prochain DS, quelle est la probabilité qu'un élève ait répondu parfaitement à au moins 3 questions ?
2. Même question si l'on sait qu'au moins une question sera réussie ?

05.10 Le service de dépannage technique du métro dispose d'équipes intervenant lors d'incidents sur les voies. Pour des causes diverses, les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les incidents se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque incident, la probabilité d'un retard est 0.25.

1. Un conducteur de métro relève quatre incidents lors de sa journée de service. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où le conducteur a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement "le conducteur subit au moins un retard".
2. Au cours des années 2010 et 2011 le service central de dépannage du métro enregistre une succession d'incidents. Le rang du premier incident pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2010 (resp. 2011) définit une variable aléatoire Y (resp. Z).
   (a) Déterminer les lois de Y et Z.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $T = \max(Y, Z)$. Calculer $\mathbb{P}(T \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire la loi de T et son espérance.

05.11 Un téleski est constitué de N perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téleski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téleski suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que notre skieur retombe sur la même perche ?

05.12 Deux joueurs A et B jouent chacun à Pile ou Face jusqu'à obtenir Pile pour la première fois (on a Pile avec probabilité $p \in [0,1]$. On note X_A et X_B le nombre de tirages nécessaires pour chacun d'eux.

1. Donner la loi de X_A et calculer $\mathbb{P}(X_A = X_B)$.
2. Soit $k \geqslant 1$. Calculer $\mathbb{P}(X_B \geqslant k)$.
3. Calculer la probabilité que B effectue plus de lancers que A.

05.13 Soit X une VAR discrète vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2. On suppose que X admet une espérance.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant n\mathbb{P}(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
   En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que sa somme vaut $\mathbb{E}[X]$
3. Réciproquement, on suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X > n)$ converge. Montrer qu'alors X admet une espérance.
4. Enoncer le théorème qui vient d'être établi.

05.14 Soit X une VARD positive, admettant une espérance.

Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{E}[X] \geqslant \varepsilon \mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon)$.
Soit Y une VARD admettant un moment d'ordre $k \geqslant 1$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|Y - \mathbb{E}[Y]|^k)}{\varepsilon^k}$$