04.1 On lance n fois de suite une pièce de monnaie. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i l'événement "Obtenir Face au i-ième lancer" et P_i l'événement "Obtenir Pile au i-ième lancer".

1. Les F_i et les P_i sont-ils des événements élémentaires ?
2. Ecrire les événements suivants à l'aide des F_i et des P_i :
   (a) A : "obtenir n fois Pile"
   (b) B : "obtenir au moins une fois Pile"
   (c) C : "obtenir exactement une fois Pile"
   (d) D : "obtenir le premier Pile au k-ième lancer" ($k \in [\![2, n]\!]$)
   (e) E : "obtenir le deuxième Pile au n-ième lancer"
   (f) F : "obtenir exactement deux fois Pile"

04.2 On dispose d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à n dans laquelle on tire une boule. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les événements E_k : "le numéro de la boule tirée est égal à k" et I_k : "le numéro de la boule tirée est inférieur ou égal à k.

1. Ecrire I_k à l'aide des $E_1, E_2, \ldots, E_n$.
2. Ecrire E_k à l'aides $I_1, I_2, \ldots, I_n$

04.3 On dispose d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à n dans laquelle on tire deux fois avec remise une boule.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les événements U_k : " la première boule tirée porte un numéro inférieur ou égal à k" et D_k : "la deuxième boule tirée porte un numéro inférieur ou égal à k".

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Ecrire en fonction des U_k et D_k les événements :

1. A : "le plus grand des numéros tirés est inférieur ou égal à p".
2. B : "le plus grand des numéros tirés est supérieur ou égal à p"
3. C : "le plus petit des numéros tirés est inférieur ou égal à p"
4. D : "le plus petit des numéros tirés est supérieur ou égal à p".
5. E : "l'un des deux numéros tirés est égal à p"
6. F : "le plus grand des numéros tirés est égal à p".

04.4 On lance un dé cubique à plusieurs reprises. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $S_i =$ "le i-ième lancer donne un 6".

1. Ecrire à l'aide des événements S_i et $\overline{S_i}$ l'événement $A =$ "la première apparition du 6 a lieu après le cinquième lancer".
2. Est-ce le même événement que $B =$ "le 6 n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers" ?
3. Est-ce le même événement que $D = \bigcup_{i \geqslant 6} S_i$?
4. On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $A_i =$ "le i-ième lancer donne un 1".
   Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :
   $$E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right), \quad E_3 = \bigcup_{i>4} A_i.$$
5. Ecrire à l'aide des événements A_i l'événement "on obtient au moins une fois le 1 après le n-ième lancer".

04.5

1. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$.
   Pour quel(s) $x \in \mathbb{R}$ peut-on définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant $\mathbb{P}(\{a, c\}) = 3x$ et $\mathbb{P}(\{c\}) = 3x^2$? Que vaut alors $\mathbb{P}(\{a, b\})$?
2. On considère $\Omega = [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k, \alpha k$, où α est un réel fixé.
   Déterminer α en fonction de n pour que la famille $(p_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ puisse définir une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
3. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $p_n = \dfrac{an(n+1)}{2^n}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la suite (p_n) définit-elle une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
   (b) Même question avec $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \begin{cases} \dfrac{a}{n!} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (c) Même question avec $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{a}{(2n)!}$

04.6 Au loto, une grille est composée de 49 numéros. On réalise alors un tirage simultané de 5 numéros.

1. Calculer la probabilité d'avoir la grille avec les 5 bons numéros.
2. Calculer la probabilité d'avoir la grille avec au moins deux bons numéros.

04.7 On compose au hasard un numéro de téléphone de 8 chiffres, les chiffre étant compris entre 0 et 9 et pouvant être répétés. Quelle est la probabilité pour que les chiffres forment une suite strictement croissante ?

04.8 On jette simultanément deux dés à 6 faces équilibrés. Trouver la probabilité que :

1. un des deux dés ait fourni le nombre 3 sachant que la somme des 2 dés a donné 6.
2. la somme des deux dés fournisse un nombre supérieur ou égal à 7 sachant que les 2 numéros sont de même parité.

04.9 Une galette des rois est découpée en 12 parts égales. Elle ne contient qu'une seule fève. On a 12 convivent qui choisissent au hasard leur part, les uns après les autres, du plus jeune au plus âgé. Vaut-il mieux être plus jeune ou plus vieux pour avoir le maximum de chances d'avoir la fève ?

04.10 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate que :

– il y a parmi les malades, 1 vacciné pour 4 non-vaccinés
– il y a 1 malade sur 12 parmi les vaccinés.

Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?
Le vaccin est-il efficace ? Autrement-dit, comparer les probabilités de tomber malade pour un non-vacciné et pour un vacciné.

04.11 Trois usines produisent des moteurs identiques qui sont stockés dans un même entrepot dont la répartition est donnée :

– 50% des moteurs proviennent de l'usine A, 30% de l'usine B et 20% de l'usine C.
– 5% des moteurs produits dans l'usine A sont défectueux, 8% pour l'usine B et 4% pour l'usine C;

Calculer la probabilité pour qu'un moteur défectueux provienne de l'usine A.

04.12 Une personne écrit des lettres personnelles à n correspondants, mais la secrétaire, croyant qu'il s'agit d'une circulaire, met les étiquettes d'adresses au hasard.

1. Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ? On pourra désigner par C_k l'événement : "la lettre numéro k arrive bien à son destinataire".
2. Les événements C_1 et C_2 sont-ils indépendants ?
3. Calculer $\mathbb{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_k})$ pour $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$.
4. Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire ?
5. On suppose désormais que le nombre de lettres est infini. Que peut-on dire de l'événement : "au moins une lettre arrive bien à son destinataire ?

04.13 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanche supplémentaire, et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue.

1. On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

04.14 Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle et Alice commence. Les lancers sont indépendants. Le gagnant est le premier à obetnir un "6". Quand Alice ou Bruno gagne, la partie s'arrête.
On s'intéresse aux trois événements suivants : A = "victoire d'Alice", B = "victoire de Bruno" et D = "pas de vainqueur".
On note F_n : "fin de la partie au n-ième lancer" et S_j : "le j-ième lancer donne un 6".

1. En exprimant l'événement D à l'aide des événements S_j, déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.
2. Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j et en déduire la probabilité de F_n.
3. Exprimer les événements A et B à l'aides événements F_n.
4. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

04.15 Soient deux points A et B sur lesquels une puce saute. Lorsqu'elle est en A, la probabilité qu'elle atterisse en B à l'instant suivant est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle reste en A est $1-p$. De même pour B avec q et $1-q$. On note a_n la probabilité qu'elle soit en A à l'instant n. De même b_n est la probabilité qu'elle soit en B à l'instant n.
On suppose que la puce est en A à l'instant initial 0.

1. Déterminer une relation entre a_{n+1}, a_n et b_n.
2. Montrer que $a_n + b_n = 1$. En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Déterminer a_n puis b_n en fonction de n.

04.16 On considère le jeu palpitant suivant : on lance trois pièces équilibrées, si les trois pièces donnent Pile le jeu s'arrête, sinon on recommence.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête au n-ième lancer. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Calculer la probabilité qu'au n-ième lancer, le jeu ne se soit pas encore arrêté. En déduire à nouveau que le jeu s'arrête presque sûrement.

04.17 On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge, et $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Soit $p \in]0, 2/3[$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est $\dfrac{1}{2}p^n$ (pour $n \geqslant 1$). Par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est $\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un enfant. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants : calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit un entier $k \geqslant 1$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

04.18 Soit $p \in]0,1[$. Une personne effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie, qui a une probabilité p d'obtenir Pile et une probabilite $q = 1-p$ d'obtenir Face. La personne gagne si elle obtient à un moment deux Pile de plus que de Face, la personne perd si elle obtient à un moment deux Face de plus que de Pile.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement O_n : "en $2n$ coups, la personne n'a ni gagné, ni perdu, et à l'issue du $2n$-ième lancer, elle a obtenu autant de Pile que de Face".
2. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité que la partie dure plus (strictement) de $2n$ coups (strictement).
3. Soit $n \geqslant 1$. Calculer la probabilité que la personne gagne après $2n$ lancers.
4. Calculer la probabilité que la personne gagne.