1 - Suites et séries

01.1 Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et vérifiant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n - 8$.

1. Déterminer la(les) limite(s) éventuelle(s) de la suite (u_n).
2. Déterminer une expression de u_n en fonction de n et de u_0.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ à déterminer.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

01.2 On note pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

01.3 1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

2. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

01.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$.

1. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
   En déduire que la suite (u_n) converge, vers un réel noté γ (appelé la Constante d'Euler).
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma \underset{n\to+\infty}{+o}(1)$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

01.5 Soit (u_n) une suite réelle quelconque et on pose pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

1. Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors (v_n) converge vers 0 également.
2. Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge vers ℓ également.

01.6 Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt[3]{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
2. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3u_n}$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

01.7 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit (u_n) une suite de réels positifs. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1 + u_n^k)$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum v_n$ converge.
2. Si $k = 1$, montrer que $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
3. On suppose $k > 1$. Donner un exemple de suite (u_n) qui vérifie :
   (a) $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge,
   (b) $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ converge,
   (c) $\sum v_n$ diverge et $\sum u_n$ diverge.

01.8 Soit (u_n) une suite de réels tous strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, la série de terme général u_n converge.
2. Montrer que si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge.
3. Justifier que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

2 - Intégrales sur un segment et intégrales impropres

01.9 On note pour $n \geqslant 2$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{\sin(x)}dx$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Démontrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

01.10 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\ln^3(x)}$
2. $\displaystyle\int_{3\pi/2}^{\pi} \tan(x)dx$
3. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin(x^5)dx$
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}\sqrt{x+1}$

01.11 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ avec le changement de variable $u = e^x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ avec le changement de variable $t = x^3+1$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x^2-12x+22}$.

01.12 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}, \quad v_n = \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}, \quad w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$$

01.13 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$ est une intégrale convergente, puis la calculer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+e^t}$.

01.14 Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 (\ln(x+1)-\ln(x))dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1-t^2)^{3/2}}dt$

01.15 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$.

1. Étudier l'existence de f, sa dérivabilité et ses variations.
2. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt$ et déduire les limites en 0, 1 et $+\infty$ de f.
3. On prolonge f par continuité en 0 et 1. Montrer que la fonction obtenue g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

01.16 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+2)}{t^2+x}dt$ pour tout réel x pour lequel l'intégrale converge.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{x}}$)
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)$.

01.17 On pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}dt$ pour tout réel x pour lequel l'intégrale converge :

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Étudier les variations de F.
3. Calculer $F(x)+F(x+1)$ pour tout x pour lequel cette expression est définie.
4. En déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de 0 puis de $+\infty$.

3 - Études de fonctions

$\boxed{\textbf{01.18}}$ Calculer les limites suivantes au point correspondant :

1. En 0 : $\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$
2. En 0 : $\dfrac{\sin(x)(\tan(x)-x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$
3. En 0 : $\dfrac{\sin(x)-\tan(x)}{1-x+\ln(1+x)-\cos(x)}$
4. En 2 : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

$\boxed{\textbf{01.19}}$ Calculer un développement limité en 0 à l'ordre indiqué :

1. $\sin(x)\cos(2x)$, ordre 4.
2. $e^{\cos(x)}$, ordre 4.
3. $\ln(1+\sin(x))$, ordre 4.
4. $\sqrt{1+\cos(x)}$, ordre 4.
5. $\dfrac{x^3}{\sin^3(x)}$, ordre 5.
6. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}$, ordre 5.
7. $(\cos(x))^{1/x^2}$, ordre 3.
8. $e^{\sqrt{4+x}}$, ordre 3.
9. $\dfrac{1}{\cos(x)}$, ordre 6.

$\boxed{\textbf{01.20}}$ On note $f(x)=\dfrac{1}{\sin(1/x)}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\sqrt{x^2+1}$.

1. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une asymptote au graphe de f et la position relative des deux courbes au voisinage de l'infini.
3. Mêmes questions avec $f(x)=(x+1)^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

$\boxed{\textbf{01.21}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+*$ par $f(x)=e^{-1/x^2}$.

1. Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0 en une fonction g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x\neq 0, f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$

$\boxed{\textbf{01.22}}$ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant en $+\infty$ et en $-\infty$ la même limite ℓ. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.

$\boxed{\textbf{01.23}}$ Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n.

1. Si P admet n racines réelles distinctes, que peut-on dire de P' ?
2. Montrer que si P est scindé (toutes ses racines sont réelles), il en est de même de P'.
3. On suppose P scindé. Montrer que P^2+1 n'admet que des racines complexes, toutes simples.

$\boxed{\textbf{01.24}}$

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose : $F_n(x)=x^5+nx-1$. Montrer que l'équation $F_n(x)=0$ admet une unique solution, notée a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est monotone et vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}^*, a_n<\frac{1}{n}$.
3. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer la limite de (na_n).

$\boxed{\textbf{01.25}}$ On note pour tout $x\geqslant 0$, $H(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}dt$.

1. Justifier que H est bien définie, étudier ses variations sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}H(t)dt$ converge et exprimer cette intégrale en fonction de $H(0)$.
3. Soit (x_n) la suite définie par $x_0=1$ et $\forall n\geqslant 0, x_{n+1}=H(x_n)$.
   (a) Prouver que $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in\mathbb{R}^{+*}$
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha>0$ tel que $H(\alpha)=\alpha$.
   (c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ |x_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|x_n-\alpha|$.
   (d) En déduire que (x_n) converge.