Le devoir comporte deux exercices et un problème indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur trois pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Partie I

Soient a et b deux réels strictement positifs. On note A la matrice carrée d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.
2. Calculer la matrice $A^2 - 2aA$.
   En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.
3. Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.
4. On pose :
   $$\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}.$$
   Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant
   $$A = Q\Delta Q^{-1}.$$
5. Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

Partie II

On considère à présent p un réel vérifiant $0 < p < 1$, et on notera $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega$ la matrice carrée d'ordre 2 donnée par :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$$

et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

6. Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par :
   $$\mathbb{P}([X = Y]) = \frac{p}{2-p}.$$
   En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \ / \ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.
7. Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.
8. Calculer les probabilités $\mathbb{P}([S = 2] \cap [D = 0])$, $\mathbb{P}(S = 2)$ et $\mathbb{P}(D = 0)$.
   Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
9. Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$\mathbb{P}([S = n]) = (n-1)p^2q^{n-2}.$$
10. En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$ que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Exercice 2

1. Montrer que si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors la matrice A^2 est aussi diagonalisable.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.

2. On considère A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I_3$.

   (b) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

   (c) Donner une base (U) de $\mathrm{Ker}(A - I)$.

   (d) Montrer que le rang de $A + I$ est égal à 3.

   (e) En déduire que A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Déterminer une base (V, W) de $\mathrm{Ker}(A^2 + I)$.

   (b) Calculer A^2U et conclure.

Problème

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.
Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, **un des individus** au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n-ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbb{P}(X_0 = a) = 1$.

Partie 1 - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soient i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

   (a) Justifier que : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

   (b) Justifier que : si i et j dans $[\![0, 4]\!]$ sont tels que $|i - j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

   (c) Établir que : $p_{1,0} = p_{1,2} = \dfrac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \dfrac{1}{2}$.

   (d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2$, la probabilité $p_{i,j}$. On présentera les résultats dans un tableau à double entrée (i en ligne et j en colonne) et on justifiera quelques cas.

2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   (a) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $U_{n+1} = MU_n$.
   En déduire l'expression de U_n en fonction de M et de U_0.

   (b) Montrer que M admet trois valeurs propres distinctes, α, β et γ, vérifiant
$$0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < 1$$
   Justifier qu'il existe une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, à préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3, à préciser, telles que :
$$M = PDP^{-1}.$$

   (c) En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la suite $(\mathbb{P}(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On ne demande pas d'expliciter les coefficients intervenant dans ces combinaisons linéaires.

   (d) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\mathbb{P}(X_n = k)\big) = 0$.

3. Établir que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 4)) = 1$.
   Comment interpréter ce résultat ?

Partie 2 - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$ la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du n-ième jour.

4. Soit n un entier naturel.
   (a) Établir les trois relations :
$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \ ;$$
$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \ ;$$
$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$
   (b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:
$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1)-2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$
5. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$,
$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$
   (b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. On définit l'événement V_A (respectivement V_B) suivant : « au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ».
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = m)$ et $\mathbb{P}(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1$.
   Que signifie ce résultat ?
7. Pour tout entier naturel n, on pose : $Z_n = X_{n+1} - X_n$.
   (a) Justifier que : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.
   (b) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(Z_n = 1)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.
   (c) Comparer $\mathbb{P}(Z_n = -1)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 1)$.
   (d) En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$.
   (e) Montrer que la suite $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.
8. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.

Bonus

Lorsque qu'un matheux dit :	**Il faut comprendre :**
c'est évident	je n'arrive pas à dire pourquoi c'est vrai
c'est immédiat que	idem
un calcul montre que	un calcul que je n'ai pas fait montrerait certainement que
vous montrerez facilement que	ça m'ennuie de montrer que
je vous conseille vivement de faire les exercices indiqués	comme je ne les ai pas faits, vous pourriez me les corriger
on a déjà montré ce résultat	je ne sais plus diable comment on fait pour prouver ce truc là
on généralise facilement à	la généralisation dépasse mon niveau
d'après une propriété bien connue	par 10 personnes au monde
la preuve tient en deux lignes	oui, mais moyennant cinq lemmes
c'est de l'algèbre	ce n'est pas intéressant (dans la bouche d'un analyste)
c'est de l'analyse	ce n'est pas intéressant (dans la bouche d'un algébriste)
c'est élémentaire (ou classique)	dans la théorie des espaces bornitziens de deuxième espèce
je n'ai pas bien compris cette étape dans votre démonstration	tu t'es planté dans ta démo