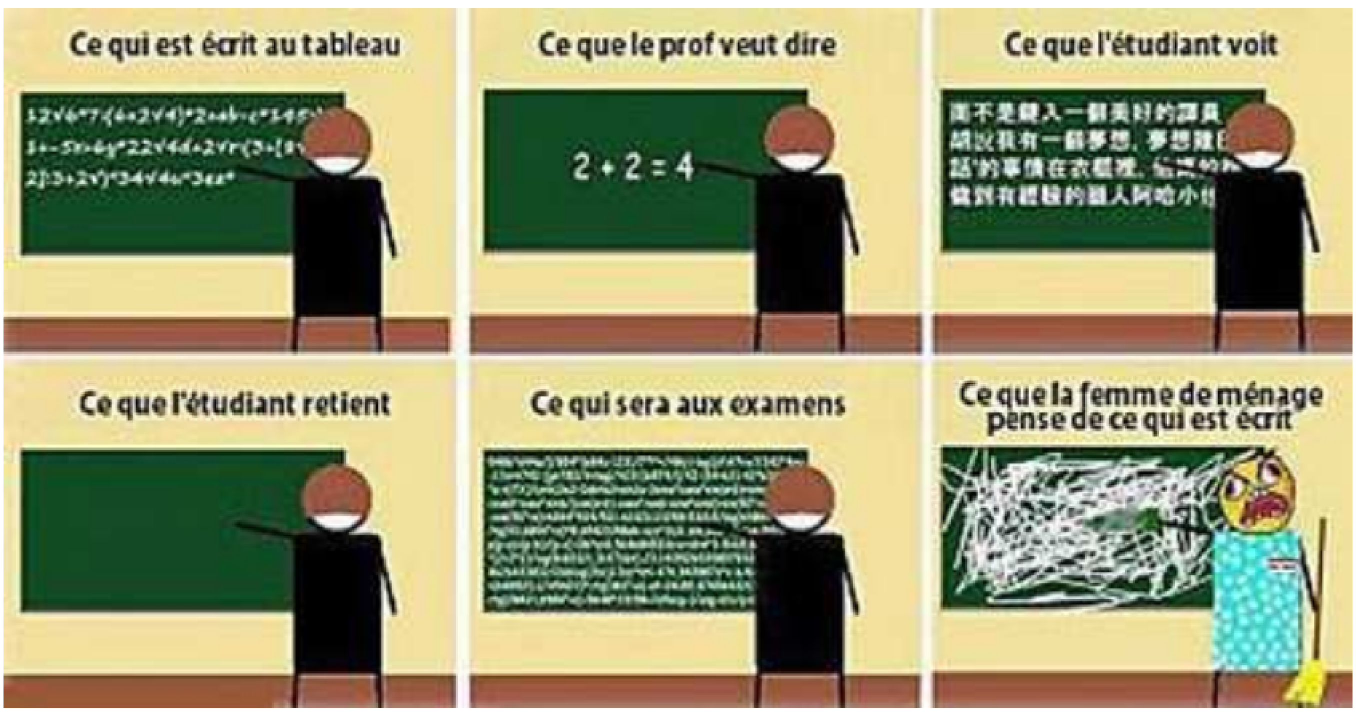
# Khâgne B/L - Concours Blanc

## Épreuve de mathématiques

*Mardi 04 Novembre 2014 - 08h-12h*

---




---

Le devoir comporte trois exercices qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.
Le sujet est rédigé sur cinq pages, dont celle-ci.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

# Exercice 1

On considère un entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $n$, chaque boule apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée,
- si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément $i$ de $[\![1, n]\!]$ et tout entier naturel $k$ non nul, on pose $T_i = k$ si $k$ tirages exactement ont été nécessaires pour constituer $i$ paires.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier $i$ de $[\![1, n]\!]$, $T_i$ est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de $T_1$, puis reconnaître cette loi.
   (b) Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de $T_1$.
2. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout $i$ de $[\![2, n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
   (a) Que représente la variable $X_i$ ?
   (b) Déterminer, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$ la loi de $X_i$ ainsi que son espérance.
   (c) En déduire que $T_n$ admet une espérance mathématique et que l'on a : $\mathbb{E}[T_n] = n^2$.
3. On effectue une suite de $n$ tirages de deux boules selon le protocole précédent.
   On note $S_n$ la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces $n$ tirages.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$.
   (c) Montrer que : $\mathbb{P}(S_n = n) = \dfrac{n!\ 2^n}{(2n)!}$.

# Exercice 2

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $k$ réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

On considère une urne qui contient des jetons numérotés de 1 à $k$, en proportion $p_j$ pour les jetons numérotés $j$. On effectue $n$ tirages avec remise dans cette urne. On admet que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour $j \in [\![1, k]\!]$, on désigne par $N_j$ la variable aléatoire représentant le nombre de jetons « $j$ » tirés.
   Déterminer la loi de $N_j$.
2. Soient $i, j$ deux entiers de $[\![1, k]\!]$ tels que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de $N_i + N_j$, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer $\text{cov}(N_i, N_j)$ et vérifier que le coefficient de corrélation linéaire $\rho(N_i, N_j) = \dfrac{\text{cov}(N_i, N_j)}{\sqrt{\mathbb{V}[N_i]\mathbb{V}[N_j]}}$ est bien compris entre $-1$ et 1.
   (c) Dans quel cas le coefficient de corrélation linéaire est égal à $-1$ ? Que vous inspire ce résultat ?

3. On note pour tout $j \in [\![1, k]\!]$,

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si le jeton } j \text{ n'a pas été tiré,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on note $Z$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros dont les jetons n'ont pas été tirés.

   (a) Justifier que $Z = \sum_{j=1}^{k} X_j$. En déduire $\mathbb{E}[Z]$.

   (b) Que donne ce résultat pour $n = 1$ ? Est-ce conforme à ce que l'on attendait ?

   (c) Pour $k \geqslant 2$ fixé, quelle est la limite de $\mathbb{E}[Z]$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

   (d) Montrer que $\mathbb{P}(Z \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}[Z]$. En déduire que $\mathbb{P}(Z = 0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

   (e) Pour $k \geqslant 2$ fixé, quelle est la limite de $\mathbb{V}[Z]$ quand $n \to +\infty$ ?

## Exercice 3

On considère une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de réels positifs telle que la série de terme général $x_n$ converge.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

1. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n.$$

   (c) À l'aide du théorème de Cesàro, établir que la série de terme général $y_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

2. On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$z_n = \left( \prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

On utilisera la convention suivante : $0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{0} = 0$.
On se propose de montrer que la série de terme général $z_n$ converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

On admet enfin le résultat suivant : si une fonction $f$ est concave sur un intervalle $I$, alors, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(b) Justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}.$$

(c) En déduire que :

$$z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

(d) Montrer que, pour tout réel $x$ positif, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

(e) Établir que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

(f) Montrer enfin que la série de terme général $z_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 et pour tout $k$ élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)dx \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(b) Calculer l'intégrale :

$$\int_{1/n}^{1} \ln(x)dx$$

et en déduire que :

$$\forall n \geqslant 2,\ -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln(n)}{n}.$$

(c) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right),$$

puis établir que :

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}.$$

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leur sommes partielles d'ordre $m$ sont équivalentes lorsque $m$ est au voisinage de $+\infty$.
Soit $N$ un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$x_n(N) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

(a) Écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

(c) Conclure que $e$ est la plus petite des constantes $\lambda$ telles que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.