Le devoir comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.. Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

EXERCICE 1

On considère un jeu de 32 cartes. On effectue une série infinie de tirages successifs d'une carte dans le jeu, en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu.

1. On note Z le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. On note U le nombre d'essais infructueux (cartes différentes d'un roi) qu'il aura fallu effectuer pour obtenir le premier roi. Déterminer un lien entre U et Z.
   En déduire la loi de U, son espérance et sa variance.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X telle que :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \dfrac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X < 3)$.
   (c) Déterminer $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4)$.
   (d) Déterminer $\mathbb{P}_{[X \geqslant 9]}(X \geqslant 10)$.
   (e) Déterminer $\mathbb{P}_{[X \geqslant 10]}(X \leqslant 9)$.
   (f) Déterminer $\mathbb{P}_{[X \geqslant 2]}(X \leqslant 4)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
3. On considère la variable aléatoire $Y = X + 1$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Y]$.
   (c) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 3

Un joueur est au casino et expérimente une nouvelle machine à sous. La machine dépend d'un certain paramètre $p \in]0,1[$.

Le joueur introduit au départ n euros. La machine commence par faire une première succession de n tirages indépendants, qui sont chacun gagnants avec une probabilité p. A chaque tirage gagnant, le joueur reçoit un euro. On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages gagnants dans cette première partie.

La machine recommence alors à jouer, autant de fois qu'il y a eu de tirages gagnants durant la première partie (si X_1 a pris la valeur m, alors la machine effectue ensuite une deuxième série de m tirages), ceci avec les mêmes conditions de gain. On note X_2 le nombre de tirages gagnants lors de la seconde série de tirages.

A l'issue de la deuxième série de tirages, on effectue une troisième série de tirages, autant de fois qu'il y a eu de tirages gagnants lors de la deuxième série, on note X_3 le nombre de tirages gagnants.
On continue ainsi.

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si on obtenu $X_k(\omega)$ tirages gagnants lors de la k-ième série, on effectue une $(k+1)$-ième série de $X_k(\omega)$ lancers. Remarquez que, si l'événement $[X_k = 0]$ est réalisé, la partie s'arrête et pour tout $j \geqslant k$, $[X_j = 0]$ sera réalisé.

1. **Etude de X_1.**
   Déterminer la loi de X_1. Préciser son espérance et sa variance.

2. **Etude de X_2.**
   (a) Justifier que $X_2(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé.
   Pour $i \in [\![0, k]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(X_2 = i)$.
   (c) En déduire que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$,
   $$\mathbb{P}(X_2 = i) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i} p^{k+i}(1-p)^{n-i}$$
   (d) On admet que $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.
   En déduire que $\mathbb{P}(X_2 = i) = \binom{n}{i} p^{2i}(1-p^2)^{n-i}$.
   (e) Que valent l'espérance et la variance de X_2 ?
   (f) Quelle est l'espérance totale de gain du joueur lors des deux premières séries ?

3. **Cas général.**
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, X_k suit une loi binomiale de paramètre (n, p^k).
   (b) On note Z le nombre de séries de tirages effectuées. Expliquer pourquoi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[Z \leqslant k] = [X_k = 0]$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \geqslant 1$.
   (d) En déduire que le jeu s'arrête presque-sûrement.
   (e) La variable $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ a donc un sens presque-sûrement (puisque presque-sûrement la somme est finie) et on admet que $\mathbb{E}[Y] = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_k]$. Déterminer le gain moyen total perçu par le joueur à la machine à sous.