Le devoir comporte trois exercices et un problème indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.. Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soit n un entier strictement positif et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } \ f_n(x) = x\exp(x) - n.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle notée u_n et que cette solution est strictement positive.
2. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $1 \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$.
3. Montrer que pour tout n strictement positif, $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$.
4. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$
5. Donner un équivalent simple de $u_n - \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j.$$

1. (a) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{2n-1}$.
   (c) Montrer que la série de terme général u_n est divergente et donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_j$.
2. (a) Etablir que :
$$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_n.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque $n \to +\infty$, puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
   (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. (a) Montrer que pour $n \geqslant 2$,
$$u_n = \frac{4^n}{4n\dbinom{2n}{n}}.$$
   (b) En utilisant la question 1, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$, puis montrer que :
$$\binom{2n}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(4^n).$$
4. En utilisant le résultat de la question 2, montrer que :
$$\frac{4^n}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\binom{2n}{n}\right).$$

Exercice 3

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2(n+k)}.$$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.
2. On rappelle que : $\cos(u) = 1 - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^4}{24} + \underset{u\to 0}{o}(u^4)$.
   Montrer que pour n assez grand, on a :
$$|u_n - v_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{24(n+k)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Problème

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \in]0,1[, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 = x_n(1-x_n).$$

Partie 1

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $[0,1]$ par :
$$f(x) = x - x^2.$$
2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $0 < x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = nx_n.$$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne demande pas de calculer.
   (c) Montrer que $0 < \ell \leqslant 1$.
5. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = n(v_{n+1} - v_n).$$
   (a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{w_n}{n}$ est convergente.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et v_n.
   (c) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(1-\ell)$.
   (d) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
   (e) Donner un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 2

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n soit divergente, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente. On pose : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Établir pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n > n_0$, l'inégalité suivante :
$$\left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k y_k\right) - L\right| \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k|y_k - L| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k|y_k - L|$$
   (b) En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k = L$$
7. Soient $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et γ un réels tels que :
   - la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$,
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_{n+1} - t_n}{z_{n+1} - z_n} = \gamma$.

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = z_n - z_{n-1}$ et $b_n = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la question 6.
   (b) En appliquant le résultat de la question 6 aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n}{z_n} = \gamma$.
8. (a) Établir l'équivalent suivant : $\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{x_n} - n}{\ln(n)}$.
   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = 1$.
   (c) En déduire, en utilisant le résultat de la question 7 avec $t_n = \dfrac{1}{x_n} - n$ et $z_n = \ln(n)$, l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 2}$ de limite nulle telle que : $\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln(n)} = 1 - \varepsilon_n$.
   (d) En déduire finalement le développement asymptotique suivant :
$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}\varepsilon_n.$$