Exercice 1

Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par la relation suivante :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$$

1. Montrer que $f(x)$ a un sens pour tout x strictement positif.
2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. (a) Calculer, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\left(\frac{1}{t-\ln(t)} - \frac{1}{t}\right) = 0$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t-\ln(t)} - \frac{1}{t}\right) dt = 0$.

   (d) Montrer que f admet une limite quand x tend vers $+\infty$, et que cette limite est $\ln(2)$.
5. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?
6. Donner l'allure de la représentation graphique de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormé.