Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+2}dt$
2. $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{1-t^2}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$
5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$
(avec un changement de variable $x=\sqrt{t^2-1}$)
6. $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln t)dt$
(avec un changement de variable $t=e^x$)

Exercice 2

On veut considérer la fonction f sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$f(x)=\int_x^{3x} \frac{\exp(-t)}{t}dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

On note pour $n\geqslant 0$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n!}e^{1-x}dx$

1. Etudier la limite de I_n quand n tend vers l'infini.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.
4. Retrouver la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.