

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I .
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
3. Justifier à l'aide de la question 1 que $(A - I)$ et $(A - 5I)$ ne peuvent pas être inversibles.
4. Déterminer $\text{Ker}(A - I)$ et $\text{Ker}(A - 5I)$.

Exercice 2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang et le noyau des matrices suivantes :

$$A + 2I \quad A - I \quad A - 3I \quad A$$

Exercice 3

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est encore une matrice triangulaire supérieure.
2. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que :

$${}^tT \times T = T \times {}^tT \iff T \text{ est une matrice diagonale}$$