Exercice 1

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, i.e. $AB = BA$.

1. Montrer que si A est nilpotente, alors AB l'est aussi.
2. Montrer que si A et B sont toutes les deux nilpotentes, alors $A + B$ l'est aussi.
3. Montrer que si A est nilpotente, alors $I - A$ est inversible et déterminer $(I - A)^{-1}$.

Exercice 2

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit QP. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois matrices telles que :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$

   On introduit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
4. En déduire l'expression des suites (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction de n.