Exercice 1

Une tortue donne naissance à un nombre N de bébés, N étant une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). Chaque bébé tortue a, indépendamment des autres) une chance sur deux d'être un mâle ou une femelle. On note M le nombre de mâles et F le nombre de femelles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $F(\Omega)$, puis déterminer la loi conditionnelle de F sachant l'événement $[N = n]$.
2. En déduire la loi du couple (N, F).
3. Calculer alors la loi de F, puis celle de M.
4. Les variables M et F sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soient $(X_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0, 1[$. On notera $q = 1 - p$.
Soit également N une variable aléatoire, indépendante de toutes les variables X_j, suivant également une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Pour tout $j \geqslant 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_j \geqslant k)$.
2. On note pour $n \geqslant 1$, $Y_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$
Déterminer la loi de Y_n.
3. On note $Z = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, autrement dit :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega))$$
Déterminer la loi de Z.
(On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(Z \geqslant k | N = n)$).