Exercice 1

On considère n boîtes $B_1, B_2, \dots, B_n$ (avec $n \geqslant 3$). Un objet est caché au hasard dans l'une de ces boîtes et on cherche à connaître le numéro de la boîte qui le contient. Pour cela, on ouvre successivement les boîtes $B_1, B_2, \dots, B_n$ jusqu'à ce que l'on puisse dire à coup sûr dans quelle boîte se trouve l'objet. Soit X la VAR égale au nombre de boîtes ouvertes.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $N = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} 1$.
   Calculer N.
2. On effectue une succession de tirages d'une boule (avec remise à chaque fois de la boule obtenue avant le tirage suivant) dans une urne comprenant au départ n boules numérotées de 1 à n.
   Pour tout $k \geqslant 1$, on note B_k le numéro de la k-ième boule tirée.
   On arrête d'extraire les boules de l'urne dès que $B_{k+1} \geqslant B_k$.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.
   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
   (b) Quelle est la signification de l'événement $[X > k]$? En déduire la loi de X.
   (c) Calculer l'espérance de X.
   (d) Déterminer le nombre moyen de boules tirées, lorsque n est "très grand" ?