

Exercice 1

On considère deux jetons J_1 , et J_2 , équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).

Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On note E l'événement "le jeton J_1 est choisi pour le jeu" et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement "le k -ième lancer fait apparaître une face numérotée 1".

1. Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \geq 1$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
2. Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \geq 1$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soit $p \in]0, 1[$. Deux adversaires (A et B) jouent au tennis. Ils sont à égalité 7 points à 7 dans le jeu décisif d'un set. Le joueur A a la probabilité p de gagner chacun des points suivants (et le joueur B a la probabilité $1 - p$). On suppose que le résultat de chacun des points est indépendant des points précédents. Le joueur gagnant est celui qui mène au score par deux points d'écart pour la première fois.

1. Justifier que le nombre de points qui restent à jouer est pair. Quelle est la probabilité que le jeu dure encore $2n$ points ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ? Quelle est la probabilité que le joueur B gagne ?
3. En déduire la probabilité que le jeu dure indéfiniment.