

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

On lui associe la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_k}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel λ tel que $0 \leq \lambda < 1$.
2. Donner un exemple de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour laquelle on a $\lambda = 0$.
3. Montrer que : $\lambda \neq 0 \iff$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{x_n}$ converge.
4. On suppose que (x_n) est définie par :
$$\begin{cases} x_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 \end{cases}.$$
 Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2

1. On jette un dé n fois de suite.
 - (a) Calculer la probabilité p_n d'obtenir 6 au moins une fois. Calculer la valeur de p_4 .
 - (b) Trouver n tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$.
2. On jette deux dés n fois de suite. Calculer la probabilité q_n d'obtenir au moins une fois le double 6.
3. Antoine Gombaud, chevalier de Méré (1607-1684) paria contre Pascal sur un sujet de probabilités à l'époque où celles-ci étaient balbutiantes.
 - ★ Pari 1 : Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, Méré pensait qu'il y avait plus de chances qu'on obtienne un 6 plutôt qu'on n'en obtienne pas.
 - ★ Pari 2 : Si l'on jette 24 fois deux dés à six faces, Méré pensait qu'il y avait aussi plus de chances qu'on obtienne un double six plutôt qu'on n'en obtienne pas.
 Méré avait-il tort ou raison dans chacun de ces cas ?