Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$.

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge et préciser la valeur de sa limite.
3. (a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier n strictement positif, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = 1 + u_k$.
   (c) Montrer que : $\forall k > 0,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k)$.
   (d) Quelle est la limite lorsque n tend vers l'infini de $\dfrac{\ln(n)}{n}$?
   (e) En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de nu_n.

Exercice 2

Soit α un réel et n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique racine positive, qu'on note x_n.
2. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \quad \sum \ln(x_n), \quad \sum \ln(1+x_n^\beta) \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}, \quad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$