EXERCICE 1

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E. L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation :

$$(*)\ : \qquad f \circ f = 4\ Id$$

A - Etude du cas $n = 2$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2} - 2\ ,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.
2. On note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\ Id)$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2\ Id)$.
   (a) Montrer que G est engendré par le vecteur u. En déduire la dimension de F et donner une base de F.
   (b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2.
3. Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B - Etude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

1. (a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.
   (b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.
   (c) Vérifier que $2Id$ et $-2Id$ satisfont l'équation $(*)$.

   On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2Id$ et $f \neq -2Id$, et on note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\ Id)$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2\ Id)$.
2. (a) Montrer que $G \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ Id)$ et que $\mathrm{Im}(f + 2\ Id) \subset F$.
   (b) Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.
3. (a) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\ Id)$.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

EXERCICE 2

1. On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.
   (a) Justifier que I_1 est divergente.
   (b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.
   (c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. *($\sqrt{e} \approx 1,65$)*
   (d) En déduire grâce à I_2 que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge (on ne cherchera pas à calculer cette série).
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.
   (a) Montrer que g est une densité de probabilité. Dans toute la suite, on nommera X une variable aléatoire admettant g pour densité.
   (b) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$.
   (c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X, notée G.
3. On note Z la variable aléatoire discrète définie par :
   $$Z(\omega) = \mathbb{N},\ Z = [X] \text{ partie entière de } X$$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k,
   $$\mathbb{P}(Z = k) = G(k+1) - G(k)$$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Z = k) = -(n+1)(1 - G(n+1)) + \sum_{k=0}^{n}(1 - G(k+1))$$
   (c) Montrer que $(1 - G(k))$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{2\ln(k)}{k^2}$.
   (d) La variable Z admet-elle une espérance ?

Exercice 3

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si Z est une variable aléatoire réelle, $\mathbb{E}(Z)$ désigne son espérance.

On admet le résultat suivant (appelé **théorème de transfert**) :
Si Z est une variable aléatoire discrète, et si g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par Z, alors

$$\mathbb{E}(g(Z)) = \sum_{x \in Z(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(Z = x),$$

lorsque cette somme existe.
On considère ici une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avcec $0 < p < 1$. On rappelle que : $\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1-p = q$.
On considère également $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Soit s un réel donné. On définit une variable aléatoire Y par :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = e^{sX(\omega)}$$

où e représente la fonction exponentielle.
Par abus de notation, on pose $Y = e^{sX}$.

1. (a) Montrer que pour tout s réel, la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance $\mathbb{E}(e^{sX})$.
   (b) Déterminer la fonction $\varphi : s \mapsto \mathbb{E}(e^{sX})$.
2. (a) Préciser la loi de S_n.
   (b) Déterminer $\dfrac{S_n}{n}(\Omega)$ et la loi de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.
   (c) Soit s réel. Montrer que $\mathbb{E}\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right) = (\varphi(s/n))^n$.

Soit a un réel fixé de $]0,1[$.

3. (a) On note $K_a = \left\{k \in [\![0,n]\!] \ / \ \frac{k}{n} \geqslant a\right\}$. Soit s un réel positif. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right) \geqslant \sum_{k \in K_a} e^{s\frac{k}{n}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant e^{as}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$$

   (b) Montrer que pour tout $s \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n e^{-as}$$

4. On suppose dans cette question que $a > p$.
   (a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln\varphi(s)$$

   (b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif $h(a,p)$ que l'on calculera en fonction de a et p.
   (c) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n\left(\sup\limits_{t>0}(at - \ln\varphi(t))\right)} = e^{-nh(a,p)}$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1 - a > 1 - p$).
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.
   (b) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n\left(\sup\limits_{t<0}(at - \ln\varphi(t))\right)} = e^{-nh(1-a,1-p)} = e^{-nh(a,p)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-nH(p,\varepsilon)}$$

   avec $H(p,\varepsilon) = \min(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p))$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$.